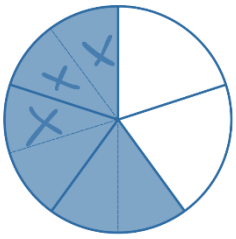
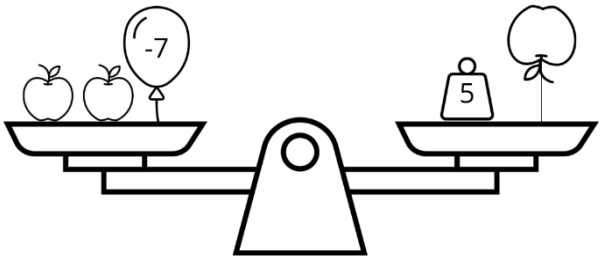
Trnavská univerzita v Trnave

Pedagogická fakulta





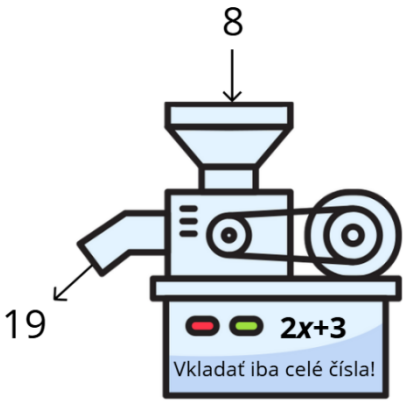
PRECHÁDZKA PO SVETE ČÍSEL

PR3CHÁD2K4 P0 5V373 ČÍ53L

Učebnica pre študentov učiteľstva matematiky na základných školách

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1
1/2	2/2	3/2	4/2	...
1/3	2/3	3/3	4/3	...
1/4	2/4	3/4	4/4	...
1/5	...	...	...	...



2025

Jana Fialová

Prechádzka po svete čísel
Učebnica pre študentov učiteľstva matematiky na základných školách

© PaedDr. Jana Fialová, PhD.

Odborní recenzenti:

prof. RNDr. Pavol Hanzel, CSc. doc. Mgr. Marek Mokriš, PhD.

Jazyková korektúra:

prof. PhDr. Juraj Hladký, PhD.

Typografické úpravy:

Mgr. Ing. Roman Horváth, PhD.

Vydala Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity v Trnave v roku 2025.

125 strán

ISBN 978-80-568-0753-8

Táto učebnica vznikla vďaka podpore agentúry KEGA v rámci projektu číslo 001UMB-4/2023 *Implementácia blended learningu do prípravy profesijného bakalára z informatiky a budúcich učiteľov matematiky a informatiky.*

Čestné vyhlásenie autora

Vyhlasujem, že učebnica bola vypracovaná mojou vlastnou odbornou prácou. Všetky tabuľky a príklady sú výsledkom mojej tvorby; obrázky sú buď mojím vlastným dielom, alebo sú prevzaté z verejne dostupných zdrojov, ktoré sú v texte riadne uvedené. Pri spracovaní sprievodného textu som pri potrebe využitia nástrojov umelej inteligencie postupovala v súlade s Kódexom výskumnej integrity a etiky na Slovensku a Kódexom pre výskumnú integritu a etiku na Trnavskej univerzite v Trnave (Predpis 12/2025) a texty vytvorené s podporou AI boli následne mnou upravené a doplnené.

Obsah

Úvod 7

I. Pohľad do histórie 9

Čísla v starovekom Egypte 9

Rímske čísla 11

Čísla v starovekom Grécku 12

Čísla v starovekej Číne 14

Počítadlá 15

Čísla v mayskej kultúre 16

Čísla v Mezopotámii 17

Vznik pozičnej číselnej sústavy v Indii 18

Čo si zapamätať? 20

Úlohy 22

Riešenia 23

II. Prirodzené čísla 24

Množina prirodzených čísel 24

Počet prirodzených čísel 26

Vývin pohľadu na prirodzené číslo u dieťaťa 27

Modely prirodzeného čísla 29

Čo si zapamätať? 31

Úlohy 32

Riešenia 33

III. Celé čísla 34

Množina celých čísel 34

Počet celých čísel 34

Konštrukcia množiny celých čísel 35

Záporné čísla v histórii 35

Modely celého čísla 36

Opozitné množstevné modely 36
Adresno-operátorové modely 37
Absolútna hodnota 38
Čo si zapamätať? 39
Úlohy 40
Riešenia 41
IV. Racionálne čísla 42
Množina racionálnych čísel 42
Počet racionálnych čísel 42
Konštrukcia množiny racionálnych čísel 43
Racionálne čísla na číselnej osi 44
Zlomok 45
Desatinné číslo 46
Percentá, promile 48
Pomer – delenie celku na nerovnaké časti 49
Čo si zapamätať? 50
Úlohy 52
Riešenia 53
V. Reálne čísla 54
Množina reálnych čísel 54
Počet reálnych čísel 54
Najznámejšie reálne čísla 55
Odmocnina z dvoch 56
Číslo π 57
Zlatý rez 57
Eulerovo číslo 59
Čo si zapamätať? 60
Úlohy 61
Riešenia 62
VI. Sčítanie a odčítanie 63

Binárna operácia 63
Vlastnosti operácií sčítanie a odčítanie 64
Sčítanie 65
Kontrola správnosti 67
Odčítanie 67
Kontrola správnosti 69
Sčítanie a odčítanie na množine $\mathbb{Z}$ 69
Sčítanie a odčítanie na množine $\mathbb{Q}$ 70
Čo si zapamätať? 72
Úlohy 73
Riešenia 74
VII. Násobenie a delenie 75
Základné pojmy a notácie 75
Násobenie 75
Postupnosť zavádzania v školskej matematike 76
Algoritmy násobenia viacciferných čísel 77
Indické násobenie 77
Algoritmus násobenia pod sebou 78
Egyptské násobenie a delenie 79
Kontrola správnosti 80
Delenie 80
Delenie so zvyškom 81
Kritériá deliteľnosti 82
Postupnosť zavádzania v školskej matematike 83
Algoritmus delenia 84
Egyptské delenie 85
Kontrola správnosti 86
Násobenie a delenie na množine $\mathbb{Z}$ 86
Násobenie a delenie na množine $\mathbb{Q}$ 86
Prednosť operácií 90

Deviatková skúška 90
Čo si zapamätať? 91
Úlohy 93
Riešenia 94
VIII. Keď sa čísla stávajú písmenami 95
Premenné 95
Rovnice a nerovnice 96
Lineárna rovnica o jednej neznámej 96
Diofantické rovnice 98
Sústava dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych 100
Ďalšie typy rovníc 101
Funkcie 102
Postupnosti 105
Priama úmernosť 106
Nepriama úmernosť 107
Čo si zapamätať? 108
Úlohy 110
Riešenia 111
IX. Slovné úlohy 112
Pojem slovná úloha 112
Zložky slovnej úlohy 113
Delenie slovných úloh 114
Riešenie slovnej úlohy 114
Rozbor zadania 114
Matematizácia – vytvorenie matematického modelu 115
Vyriešenie matematickej úlohy 116
Dematematizácia – návrat do pôvodnej situácie 117
Tvorba slovnej úlohy 119
Čo si zapamätať? 120
Úlohy 121

Riešenia 122
Záver 123
Literatúra 124

Úvod

Matematika je odvekou súčasťou ľudského poznania a kultúry. Cesta jej výučby na školách je plná tradícií, zmien i inovácií. Učiteľ matematiky zohráva kľúčovú rolu – je sprievodcom žiakov pri objavovaní základných vlastností čísel, operácií, štruktúr či riešení úloh, ktoré tvoria jadro matematickej gramotnosti pre život i ďalšie štúdium.

V dnešnom svete, formovanom technológiami, dátami a potrebou logického uvažovania, nadobúda matematika nový rozmer – nielen ako nástroj výpočtu, ale aj ako jazyk opisujúci a vysvetľujúci reálne javy. Pomáha žiakom rozvíjať analytické myslenie, schopnosť riešiť problémy, pracovať systematicky, aj overovať a argumentovať svoje riešenia. Práve preto je kvalitné vyučovanie matematiky na základnej škole jedným zo základných pilierov všeobecného vzdelania.

Táto učebnica je zameraná na podporu tých, ktorí budú učiť matematiku na základnej škole – na všetkých jej stupňoch či cykloch. Obsahovo pokrýva široké spektrum tém: od historického vývoja číselných systémov rôznych starovekých civilizácií, cez úlohy a modely prirodzených, celých, racionálnych a reálnych čísel, až po základné počtové operácie, zavádzanie pojmov premenných, rovníc a postupností, aj špecifiká slovných úloh.

Každá kapitola obsahuje sumár dôležitých poznatkov na zapamätanie, úlohy na precvičenie i riešenia, čo uľahčuje vlastnú prípravu budúcich učiteľov. Text je doplnený o didaktické komentáre, riešené úlohy a doplňujúce ilustrácie.

Štruktúra učebnice odráža potrebu vzájomného prepojenia obsahovej a didaktickej stránky výučby:

- Najskôr prehlbuje historickú a kultúrnu perspektívu matematiky.
- V ďalších častiach dôsledne mapuje jednotlivé typy čísel a príslušné modely, ktoré súvisia s vývinom myslenia žiaka.
- Samostatné kapitoly sú venované algoritmom, metódam a postupnosti zavádzania základných operácií (sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie).
- Nezabúda sa ani na prechod k abstraktnejšiemu jazyku matematiky – práci s premennými, rovnicami či funkciami.
- Osobitná časť sa venuje slovným úlohám a procesu matematizácie reálnych situácií.

Dôraz sa kladie nielen na zvládnutie učiva, ale najmä na rozvíjanie didaktických stratégií, podporu motivácie a schopnosti reflektovať typické

žiacke ťažkosti či chyby a viesť žiakov pomocou vhodne zvolených modelov, úloh a otázok. Pre budúceho učiteľa je kľúčové rozvíjať nielen svoje matematické vedomosti, ale aj pedagogické zručnosti a cit pre individuálne potreby detí. Využitie tejto učebnice môže byť rôznorodé – ako podpora pri štúdiu didaktiky matematiky, ako pomôcka pri pedagogickej praxi, či ako inšpirácia pri vlastnej tvorbe edukačných aktivít.

Veríme, že pomocou tejto učebnice nájdete nielen odpovede na svoje otázky, ale aj podnety k vlastnému tvorivému rozvoju a budete môcť viesť svojich budúcich žiakov k radosti z objavovania a porozumenia sveta matematiky.

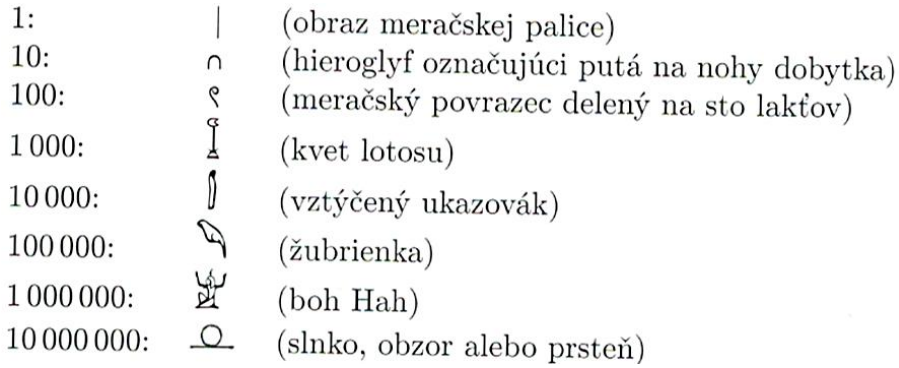
I. Pohľad do histórie

V tejto kapitole sa pozrieme na to, ako ľudia v rôznych častiach sveta v priebehu histórie zapisovali čísla. Spoznáme staroveké číselné sústavy v Egypte, Ríme, Grécku, Číne, Mezopotámii, u Mayov a v Indii. Zistíme, ako vznikli pozičné aj nepozičné spôsoby zápisu, aký význam mali symboly ako paličky, bodky či písmená, a ako sa postupne vyvinul spôsob zápisu, ktorý používame dnes. Táto kapitola nám ukáže, že aj čísla majú svoj príbeh.

Od prvých číselných záznamov v podobe zárezov na kosti po dnešnú podobu desiatkovej pozičnej číselnej sústavy uplynul dlhý čas s mnohými zaujímavými medzníkmi. V každej kultúre prešiel zápis čísel podobným vývojom. Všade sa najprv objavovali nepozičné spôsoby zápisu čísel, kde každý zaznamenaný znak mal vždy presne určenú nemennú hodnotu. Postupom času vznikali snahy o skrátenie a zjednodušovanie zápisu zavádzaním rôznych vylepšení, ktoré majú črty pozičnej číselnej sústavy. Hodnota znaku potom závisí aj od jeho umiestnenia v celom zápise čísla. V nasledujúcich odsekoch priblížime vývoj zápisu čísel v niektorých vybraných kultúrach.

Čísla v starovekom Egypte

Staroveký Egypt je výborným príkladom, kde vznikla typicky nepozičná číselná sústava. Počiatky tejto civilizácie siahajú do roku 3200 – 3000 pred n. l. Na zaznamenávanie počtu sa postupne vytvárali špeciálne hieroglyfy:



Obrázok 1. Egyptské čísla (Čižmár, 2017, s. 51)

Na obrázku 1 vidíme, aké dôležité postavenie hrala v ich chápaní čísel desiatka. Zvislú paličku na zapisovanie jednotiek môžeme nájsť v prvopočiatkoch zápisov čísel takmer každej civilizácie. Je veľmi možné, že označovala jeden prst. Egypťania vytvorili svoje vlastné znaky pre desiatku ako desať jednotiek,

potom stovku ako desať desiatok a tak ďalej až po desať miliónov, čo už bolo pre všetky praktické potreby dostatočne veľké číslo.

Ich číselnú sústavu možno nazvať *typickou nepozičnou desiatkovou sústavou.* Nepozičnou preto, že každý znak v zápise celého čísla má presne danú nemennú hodnotu. Palička je jednotka bez ohľadu na jej pozíciu. Hodnota celého čísla je súčtom hodnôt všetkých použitých znakov. To znamená, že ak by sa nám jednotlivé symboly porozhadzovali, napríklad ak by boli skryté niekde na obraze na rôznych miestach, aj tak budeme vždy po nájdení všetkých znakov vedieť získať hodnotu daného čísla.

Znaky sa zapisovali jednoducho vedľa seba. Pre prehľadnosť sa rovnaké symboly zapísali spolu, pričom sa využívala celá plocha (nielen riadok). Symboly bývali usporiadané zľava doprava od najvyššej hodnoty po najnižšiu podobne, ako to máme dnes.

Napríklad číslo 1 243 657 bolo zapísané takto:

Obrázok 2. Zápis čísla 1 243 657 v Egyptskom číselnom systéme (Čižmár, 2017, s. 51)

- Všimnime si podobnosť tohto spôsobu so spôsobom, ktorý sa dnes využíva v učebniciach matematiky. Čísla sa spočiatku znázorňujú nepozičným spôsobom: jednotky paličkami a pre desiatku sa zavádza nový symbol – krúžok.

Obrázok 3. Nepozičný spôsob zápisu dvojciferného čísla v učebnici (Černek, 2018, s. 7)

Zaujímavosťou staroegyptskej matematiky bol ich spôsob násobenia a delenia postupným zdvojnásobovaním, ktorému sa budeme bližšie venovať v kapitole *Násobenie a delenie.*

Ďalšou zaujímavosťou je zavedenie tzv. kmeňových zlomkov (zlomkov, ktoré majú v čitateli vždy číslo 1). V starovekom Egypte neexistoval zlomok tvaru *m/n*. Všetky zlomky mali tvar *1/n*, čo zapisovali tak, že nad zápis hodnoty

menovateľa zapísali špeciálnu značku. Podrobnejšie sa tejto téme budeme venovať v kapitole *Racionálne čísla.*

Rímske čísla

Ďalšou veľkou ríšou, ktorá sa po celú dobu svojej existencie uspokojila s nepozičným spôsobom zápisu prirodzených čísel, bola Rímska ríša (8. stor. p. n. l. – 15. stor. n. l.). Rímske čísla vznikli podobne ako egyptské na princípe nepozičnej číselnej sústavy. Okrem znakov pre mocniny desiatky Rimania vytvorili symboly aj pre päťku, päťdesiatku a päťstovku. Použitie symbolu pre päťku má zrejme dôvod v počte prstov na jednej ruke. Týmto dosiahli skrátenie zápisu, keďže žiadny zo symbolov neboli nútení použiť viac ako štyrikrát.

I – 1, V – 5, X – 10, L – 50, C – 100, D – 500, M – 1000

- Na zapamätanie existujú viaceré mnemotechnické pomôcky, napr.: Ivan Viedol Xaviera Lesnou Cestou Do Mesta, LaCo DoMa, Lacná Cibuľa Drahé Mäso a i.

Pôvod niektorých znakov je odvodený z ich názvu: C – centum, M – mille, pôvod ďalších je spätý s počítaním na prstoch – jednotka vyzerá ako jeden prst, V ako celá dlaň s roztiahnutými prstami, X ako dve V. L vzniklo prepolením C vodorovnou čiarou. M sa pôvodne písalo ako (|), D ako |), čiže polovica. Vďaka tomu sa dali vytvárať aj väčšie čísla, napr.: ((|)) = (M) bolo desaťtisíc, (((|))) = ((M)) stotisíc. S väčšími číslami pracovať nepotrebovali.

Rímske čísla v starovekom Ríme fungovali rovnako ako egyptské. Každý symbol znamenal vždy presne určenú hodnotu. Skrátenie zápisu, ktoré dnes poznáme, vzniklo až v stredoveku a bolo skôr slepou uličkou na ceste k pozičným číselným sústavám. V starovekom Ríme IX znamenalo 11. Možno pisár dostal pokarhanie za nedodržanie správneho poradia, ale na hodnotu čísla zmena poradia nemala vplyv. Dôkazom „novosti“ pravidiel písania niektorých čísel sú aj staré ciferníkové hodiny, na ktorých číslo štyri nie je zapísané ako IV, ale IIII. Toto skrátenie zápisu sa týka iba týchto čísel: 4 – IV, 9 – IX, 40 – XL, 90 – XC, 400 – CD, 900 – CM. To znamená, že číslo 999 nemožno napísať ako IM, ale jedine ako CMXCIX. Všetky súčasne platné pravidlá zápisu rímskych čísel možno nájsť napríklad v publikácii Mokriša a Scholtzovej (2021).

Rímska sústava zostáva čisto nepozičnou, aj keď v týchto šiestich prípadoch výmena poradia mení hodnotu čísla. Mohli by sme totiž považovať takéto dvojznaky za nové symboly označujúce konkrétnu hodnotu. Týchto šesť výnimiek v skutočnosti síce skrátilo zápis niektorých čísel, avšak pre praktické počítanie boli skôr kontraproduktívne.

- Nepozičnosť rímskych čísel je v jednom ohľade veľmi výhodná. Skutočnosť, že vôbec nezáleží na poradí jednotlivých znakov sa dá využiť pri zašifrovaní čísla do textu. Kedysi po vysvätení chrámu či inej dôležitej budovy bol nad dverami napísaný latinský nápis tak, že niektoré písmená boli zvýraznené. Boli to písmená, ktoré označujú rímske čísla. Stačilo ich všetky spočítať a zistiť rok vysvätenia.

Čísla v starovekom Grécku

Medzi nepozičné číselné sústavy zaraďujeme aj sústavy abecedné. To sú také spôsoby zápisu čísel, pri ktorých nie sú vyvinuté špeciálne znaky pre označovanie čísel, ale používajú sa už existujúce znaky abecedy. Začiatky tohto spôsobu možno badať v starovekom Grécku, kde sa určitým číslam priradili písmená podľa ich názvu.

Pôvodný spôsob zápisu čísel sa podobá na staroegyptský spôsob:

Obrázok 4. Príklady gréckych číslic (Mareš, 2008, s. 39)

Zrejmý je pôvod v počítaní na prstoch, čo vidieť nielen v použití desiatky, ale aj päťky.

Neskôr so vznikom malej abecedy sa začal vytvárať iónsky spôsob zápisu čísel, ktorý postupne vytlačil pôvodné varianty. Jeho princíp je zhodný s hebrejským aj fenickým princípom, odkiaľ bol zrejme do Grécka importovaný. Namiesto opakovania toho istého symbolu boli použité ďalšie znaky. Prečo? Znakov v abecede je predsa dosť, tak prečo si neskrátiť záznam?

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α'	β'	γ'	δ'	ε'	ς'	ζ'	η'	ϑ'
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ι'	κ'	λ'	μ'	υ'	ξ'	o'	π'	ς'
100	200	300	400	500	600	700	800	900
ρ'	σ'	τ'	υ'	φ'	χ'	ψ'	ω'	$\text{ϡ}'$

Obrázok 5. Iónsky spôsob zápisu čísel (Čižmár, 2017, s. 139)

Všimnime si, že každé písmeno vo význame čísla je označené čiarkou – apostrofom.

Každý znak mal v zápise čísla presnú hodnotu a hodnoty všetkých znakov sa opäť sčítavali. Pre väčšie čísla sa zavádzali rôzne značky. Napríklad čiarka vľavo dolu od písmena znamenala, že jeho hodnota je tisíckrát väčšia, čiže ‚β znamenala dvetisíc. Desaťtisíce sa zasa označovali písmenom M a nad ním sa zapísal počet, čiže $\overset{\gamma}{M}$ znamenalo 30 000.

Egyptský hieroglyfický a grécky abecedný spôsob sú v princípe rovnaké – obe sú nepozičným spôsobom. Obe majú systém znakov, ktorým priradili určitú hodnotu. Tieto znaky písali vedľa seba a konečnú hodnotu čísla získavali sčítaním hodnôt všetkých použitých znakov. Nájdu sa však aj odlišnosti:

Egypťania používali iba sedem znakov, takže bolo zrejme ľahké si ich zapamätať. Avšak pri niektorých číslach mohol byť záznam pomerne dlhý. Napríklad na zaznamenanie čísla 999 potrebovali nakresliť 27 znakov (deväť povrazcov, deväť pút a deväť palíc).

V abecednej sústave by sme potrebovali iba tri znaky pre číslo 999. Avšak celkový počet znakov je dvadsaťsedem. Zapamätať si ich bolo určite nevyhnutným predpokladom každého pisateľa a počtára. Zistiť hodnotu konkrétneho písmena pre človeka, ktorý neovláda všetky znaky spamäti, sa dá buď pomocou abecedného poradia – vymenujeme všetky písmená abecedy pred ním a popritom počítame, čo by určite viedlo k mnohým chybám, alebo by sme potrebovali mať neustále poruke tabuľku, kde máme hodnoty uvedené. Starovekí Gréci však nemali k dispozícii náš spôsob zápisu čísel, preto by musela byť hodnota každého symbolu na takejto tabuľke popísaná slovne.

Abecedné sústavy sú napriek tomu dôležitým medzníkom, pretože všetky ostatné nepozičné sústavy nemali špeciálne znaky pre čísla jeden až deväť, ale tieto boli utvárané opakovaním znaku pre jednotku.

Čísla v starovekej Číne

Po nepozičných počiatkoch zápisu čísel, ktoré mali desiatkový základ, dospeli v starovekej Číne asi v 4. stor. pred n. l. k prehľadnému, čiastočne pozičnému spôsobu zápisu čísel. Tento spôsob sa vyvinul z používania počítacích paličiek. Počítalo sa tak, že paličky rovnakej dĺžky sa ukladali do tabuľky, čo prirodzene vyústilo do myšlienky ukladať oddelene jednotky, desiatky, stovky atď.

Znovu vidíme prepojenie na počítanie na prstoch – jedna palička = jeden prst, dve paličky = dva prsty, šestka je už znázornená vodorovnou paličkou ako celá ruka a k tomu jednotka. Čísla od jeden do deväť sú teda zapisované analogicky ako v nepozičných sústavách Egypťanov či Rimanov. Čísla od desať do deväťdesiat (po desiatkach) vznikli otočením znakov pre 1 – 9 o 90°.

Tu ale nastáva veľký zlom. Na zápis väčších čísel sa znovu využívajú tieto isté symboly, t. j. jedna zvislá palička môže znamenať jednotku, stovku, desaťtisícku atď. v závislosti na tom, kde sa v zápise nachádza. To je veľký krok smerom k pozičnému spôsobu zápisu čísel.

Číslice	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rád 10^{2k}	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
Rád 10^{2k+1}	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

Obrázok 6. Staročínske čísla (Čižmár, 2017, s. 95)

Napríklad číslo 7349 sa zapísalo takto:

𝍮 𝍢 𝍫 𝍧

Obrázok 7. Číslo 7349 (Čižmár, 2017)

Počet jednotiek zapísali pomocou symbolov z horného riadka, desiatky zo spodného, stovky znovu z vrchného, tisícky zo spodného atď.

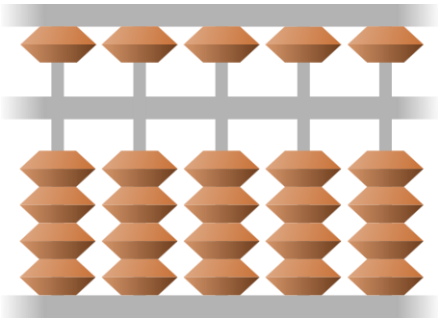
Mohli by sme namietať, že takto môžu nastať nejasné zápisy. Veď jedna palička samostatne zapísaná môže byť jednotka, rovnako ako stovka, keďže žiadny znak pre nulu neexistoval. V skutočnosti Číňania tento problém nemali, pretože počítali zväčša v tabuľkách a preto jednu paličku ako stovku napísali do tretieho okienka od konca a zvyšné dve nechali prázdne. V textoch zasa taký veľký rádový rozdiel nevznikal z dôvodu kontextu, v ktorom sa číslo nachádzalo. Napríklad, keď sa hovorí o počte detí jedného muža, tak 5 asi nebude 500, či 50000. Rozdiely medzi rovnakými zápismi sú totiž v aspoň dvoch rádoch.

Tento spôsob zápisu má niekoľko nesporných výhod. Po prvé, má jednoduché ľahko zapamätateľné symboly. Opakovanie tých istých symbolov vo vyšších rádoch robí z tejto číselnej sústavy **semipozičnú číselnú sústavu.** Nie je ešte úplne pozičná, pretože sa nedá jednoznačne určiť rád číslice – chýba symbol pre nulu ako prázdne miesto. Tento drobný nedostatok bol postupne odstránený prevzatím symbolu pre nulu, pravdepodobne z Indie. Časom sa v Číne udomácnili aj indické symboly pre číslice 1 až 9 a dnešný pozičný desiatkový spôsob zápisu (od 8. stor. n. l.).

Zaujímavosťou starovekej Číny je to, že pravdepodobne tu sa po prvýkrát zaviedli záporné čísla ako samostatné matematické objekty a to pomocou počítacích paličiek dvoch farieb: červené nazývané *čeng* predstavovali kladné čísla, čierne nazývané *fu* predstavovali záporné čísla. Podrobnejšie sa tejto téme budeme venovať v kapitole *Celé čísla.*

Počítadlá

Niekedy v druhom storočí n. l. sa začali v starovekej Číne používať počítacie pomôcky nazývané *suan-pchan.* Tieto počítadlá boli natoľko efektívnym nástrojom, že v niektorých častiach Zeme sú používané dodnes. Najmä ich obmena vytvorená neskôr v Japonsku – *soroban.* Na obrázku 8 vidíme schematický nákres sorobanu.



Obrázok 8. Soroban (https://freesvg.org/cmy-abacus-japanese)

Horné korálky predstavujú päťku, spodné sú jednotky, takže v každom ráde môžeme mať maximálne deviatku. Počítajú sa tie korálky, ktoré sú prisunuté k oddeľovacej tyčke. Na tejto tyčke bývajú obvykle značky na každej tretej pozícii. Tieto značky pre prehľadnosť označujú jednotky, tisícky, milióny atď. Ak počítame s prirodzenými číslami, prvý rád sprava predstavuje jednotky, ďalší desiatky atď. Môžeme ale počítať aj s desatinnými číslami. V tom prípade jednotky budú na prvej označenej pozícii sprava, sprava od nich desatiny, ďalej doprava stotiny atď.

Od 16. stor. n. l. sa v Rusku využíva počítadlo nazývané *sčot.* Na rozdiel od sorobanu má pozície umiestnené nad sebou. Celkom dole sú dve jednotky,

v ďalšom riadku desiatky atď. Piata a šiesta guľôčka v každom riadku je farebne odlíšená pre prehľadnosť. Inak každá guľôčka označuje vždy jednotku príslušného rádu. Sčot funguje na rovnakom princípe ako japonský soroban, iba nemá zvlášť označené päťky.

Obrázok 9. Sčot nájdený v Poľsku
(https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polish_abacus_-_Liczyd%C5%82o.JPG)

- Všimnime si podobnosť ruských sčotov s našim stovkovým počítadlom. Iste by bolo možné používať ho rovnako ako sčoty. V praxi sa ale stretávame iba s nepozičným používaním nášho počítadla v zmysle reprezentácie čísel od 1 do 100 počtom guľôčok.

Čísla v mayskej kultúre

V mayskej kultúre vznikla postupne podobne ako v Číne semipozičná číselná sústava. Táto však mala niekoľko odlišností, ktorými sa líšila nielen od čínskej ale aj od iných nepozičných sústav.

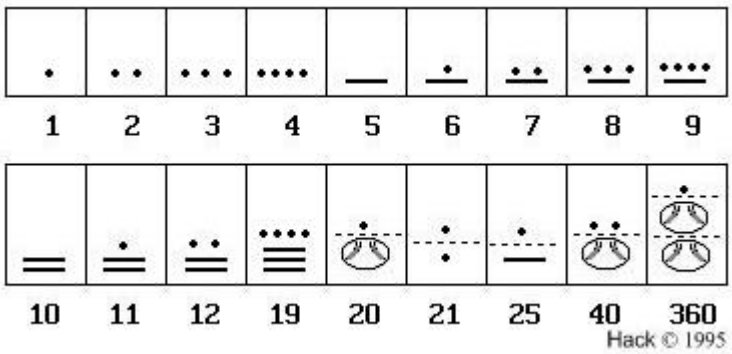
1. Mayovia neoznačovali jednotky paličkami, ale bodkami.

2. Významným číslom bola päťka, podobne ako u iných kultúr. Tá dostala samostatný znak – vodorovnú čiarku. Ďalším významným číslom nebola desiatka, ale dvadsiatka. Dvadsiatka sa stala aj základom ich semipozičnej číselnej sústavy.

3. Čísla nezapisovali v riadku, ale v stĺpci s tým, že čísla najnižšieho rádu boli zaznamenané najnižšie. Takže jednotky boli dole, nad nimi dvadsiatky, nad nimi štyristovky atď.

4. Mayovia vytvorili aj vlastný znak pre nulu – prázdna lastúra.

Čísla od jeden po devätnásť sa zapisovali prakticky nepozičným spôsobom pomocou dvoch znakov – bodky pre jednotku a čiarky pre päťku.



Obrázok 10. Mayské čísla (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Maya_numbers.jpg)

Väčšie čísla už boli tvorené na pozičnom základe. Jednotka o rád vyššie už znamenala jednu dvadsiatku.

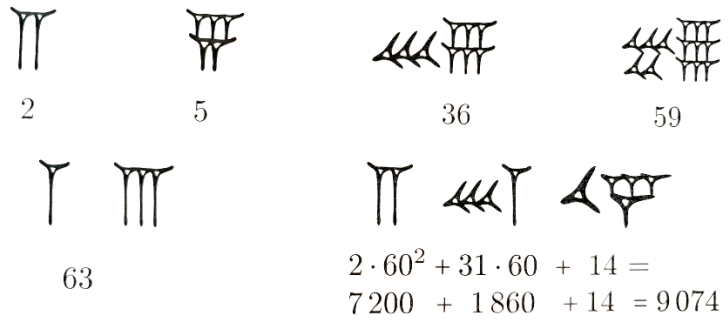
Zapisovať čísla týmto spôsobom by bolo pre nás rovnako ľahké ako zapisovať čísla starovekým čínskym spôsobom. Problém je ale v našom návyku na práci v desiatkovej číselnej sústave. Zmena základu na dvadsať robí pochopenie mayských čísel náročnejším.

Ak chceme zapísať, povedzme, číslo stotrinásť po maysky, musíme sa najskôr spýtať: Koľko je to dvadsiatok? Päť. A k tomu trinásť jednotiek. Takže napíšeme trinásť ako dve päťky a tri jednotky a nad to dáme jednu päťku ako päť dvadsiatok.

Mayský spôsob stále nepokladáme za úplne pozičný, pretože čísla od 1 do 19 sú tvorené nepozične, a to môže spôsobovať nejednoznačnosť zápisov. Napr. dve čiarky nad sebou môžu znamenať desať, ale aj päť jednotiek a päť dvadsiatok.

Čísla v Mezopotámii

Na území Mezopotámie vznikla veľmi zaujímavá číselná sústava. Jej základom bola prekvapivo šesťdesiatka, ale desiatka v nej tiež mala svoje významné zastúpenie. Využívali sa iba dva znaky, ktoré vznikali rytím do mäkkej hlinenej tabuľky – zvislý pre jednotku a „zobáčikovitý“ pre desiatku. Čísla od jeden do 59 sa zapisovali nepozične. Väčšie čísla pozične so základom 60. Čísla sa zapisovali zľava doprava, s tým že jednotky boli vpravo, naľavo od nich šesťdesiatky, ešte pred nimi $60 \cdot 60 = 3600$-vky atď.



Obrázok 11. Čísla v Mezopotámii (Čižmár, 2017, s. 71)

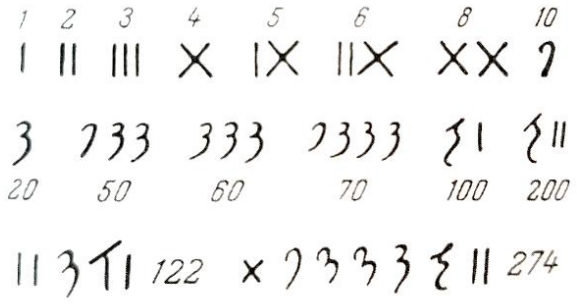
Zaujímavosťou je, že už v druhom tisícročí p. n. l. vytvorili znak pre nulu – , ktorý pôvodne označoval bodku na konci vety.

Dôvody, prečo túto číselnú sústavu nazývame semipozičnou, sú rovnaké ako pre mayskú sústavu – nepozičný spôsob zápisu menších čísel a z toho vyplývajúca nejednoznačnosť zápisu.

Vznik pozičnej číselnej sústavy v Indii

Indickej kultúre sa pripisuje zásluha za vypracovanie dôslednej desiatkovej pozičnej číselnej sústavy a za jej rozšírenie v stredovekej matematike Stredného východu a v neskoršej stredovekej európskej matematike. Sprostredkovateľom bola arabská matematika, ktorá sa s indickým spôsobom dostala do styku v úvodnej fáze svojho vzniku a prvého rozvoja v 8. a 9. stor. n. l.

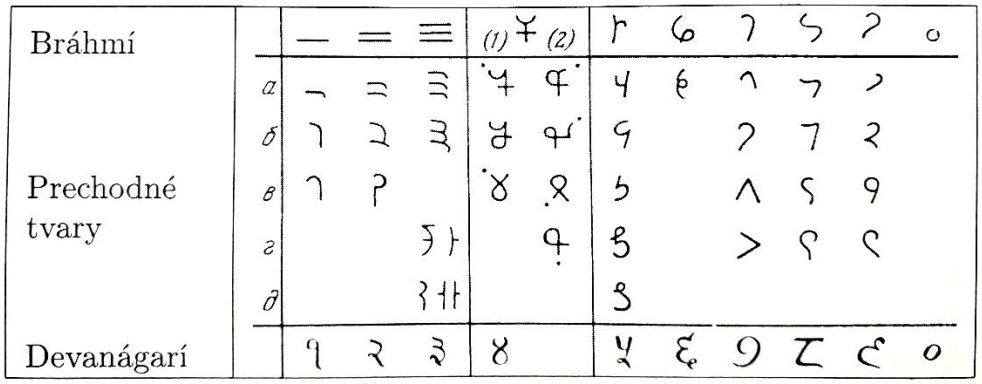
Pre politickú rozdrobenosť Indie nebola cesta k pozičnému spôsobu jednoduchá a trvala niekoľko storočí.



Obrázok 12. Číslice kharošthí (Čižmár, 2017, s. 113)

Na začiatku sa používal nepozičný systém zápisu čísel. Príkladom boli číslice kharošthí (pozri obrázok 12), ktoré sa používali na severozápade Indie medzi 4. stor. p. n. l. a 3. stor. n. l. Zaujímavosťou je vytvorenie znaku pre štvorku namiesto päťky.

Ďalším príkladom sú číslice bráhmí, ktoré sa napríklad na Srí Lanke používali až do 19. stor. n. l. Z týchto znakov boli pravdepodobne odvodené tvary dnešných číslic.



Obrázok 13. Vývoj tvarov číslic v Indii (Čižmár, 2017)

Okolo roku 500 n. l. sa používal abecedný spôsob zápisu čísel s nábehom na pozičný systém. V tomto čase vzniklo aj osobitné označenie pre prázdne miesto – malý krúžok.

Dôsledná pozičná číselná sústava s desiatimi znakmi vznikla v 6. storočí n. l. zrejme aj vďaka vplyvu mezopotámskeho, helenistického (gréckeho) a čínskeho.

V 7. stor. sa používala na Prednom východe, V 8. storočí prenikla do Číny a Indonézie. Prijatie v stredovekej Európe bolo zdĺhavé (10. – 14. stor.).

Vývoj tvaru číslic prebiehal na rôznych miestach odlišne. Názvy jednotlivých číslic majú takisto svoj pôvod v Indii: 1 – ékah, éká, ékam, 2 – dvan, dvi, dvé, 3 – trajah, tisrah, tríni, 4 – čatvárah, čatasrah, čatvári, 5 – panča, 6 – šaš, 7 – sapta, 8 – ašta, 9 – nava, 10 – daša.

Každé číslo v desiatkovej číselnej sústave sa dá zapísať takto:

$$1234 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

Jednotka tu neznamená 1, ale je to jedna tisícka, dvojka sú dve stovky atď.

Nedesiatkové pozičné číselné sústavy

Príkladom pozičnej číselnej sústavy s iným ako desiatkovým základom je **dvojková sústava.**

V dvojkovej sústave používame iba dva znaky: 0 a 1. Každé číslo zapísané v dvojkovej sústave (v tzv. skrátenom zápise) môžeme zapísať v rozvinutom zápise takto:

$$110101 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Ak chceme prepísať číslo do desiatkovej sústavy, stačí pravú stranu rovnice vyčísliť (vypočítať hodnotu v desiatkovej sústave). Toto číslo je teda rovné číslu 32 + 16 + 4 + 1 = 53.

Náročnejšie je zapísať známe číslo z desiatkovej do dvojkovej sústavy. V tomto prípade musíme červené čísla nájsť.

Napríklad číslo 69 v dvojkovej číselnej sústave zapíšeme tak, že vypíšeme všetky mocniny čísla 2: 2, 4, 8, 16, 32, 64, … ďalšie už netreba, pretože sú väčšie ako 69. Číslo 69 sa skladá z jednej 64, jednej 4 a jednej 1. Zapíšeme:

$69_{10} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 1000101_2$.

Aby bolo zrejmé, v ktorej sústave je číslo zapísané, píšeme vpravo dolu malé číslo označujúce základ číselnej sústavy.

Základom číselnej sústavy môže byť akékoľvek prirodzené číslo väčšie ako jeden. Pri väčších základoch ako desať musíme pridať aj nové znaky pre desiatku, jedenástku atď. Napríklad **šestnástková (hexadecimálna) číselná sústava** používa znaky: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f.

Potom číslo napísané v šestnástkovej sústave prepíšeme nasledovne:

$29a1_{16} = 2 \cdot 16^3 + 9 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 1$.

Každá pozičná číselná sústava so základom z, musí mať presne z znakov označujúcich čísla od 0 do $z - 1$. Preto má dvojková sústava iba číslice 0 a 1, trojková sústava 0, 1 a 2 a šestnástková 0, 1, … až po 15. Číslice s hodnotami 10, 11, 12, 13, 14, 15 musia mať ale iný symbol, ktorý nie je zložený z dvoch znakov, pretože by to viedlo k nejednoznačnosti. Najčastejšie sa používajú prvé písmená abecedy.

Čo si zapamätať?

- Nepozičná číselná sústava: každý znak má pevnú hodnotu, nezávisle od jeho umiestnenia (napr. Egypt, Rím, Grécko).
- Semipozičný princíp: hodnota číslice závisí aj od jej miesta v zápise (napr. Mezopotámia, Čína, Mayovia), číslice na jednotlivých pozíciách sú tvorené nepozične.
- Egyptská sústava: používali hieroglyfy, základom bola desiatka, čísla zapisovali sčítaním hodnôt znakov.
- Rímske čísla: používali písmená (I, V, X, L, C, D, M), nevyužívali skrátený zápis ako IV, IX, ktorý vznikol až neskôr.

- Grécka abecedná sústava: každé písmeno abecedy malo číselnú hodnotu, zapisovalo sa s apostrofom.
- Čínske paličkové čísla: semipozičný zápis – význam paličky závisel od pozície, neskôr prevzali symbol pre nulu.
- Mayská sústava: základ 20, používali bodky a čiarky, vytvorili znak pre nulu – lastúru.
- Mezopotámska sústava: základ 60, používali len dva znaky, mali aj znak pre nulu.
- Indická sústava: ako prvá vyvinula dôsledne pozičný desiatkový systém vrátane nuly, z neho pochádzajú dnešné číslice.
- Dvojková a šestnástková sústava: používané najmä v informatike, využívajú iné základy ako 10.
- Základom pozičnej číselnej sústavy môže byť akékoľvek prirodzené číslo väčšie ako 1. Ak je základom číslo n, tak takáto sústava musí obsahovať systém presne n znakov pre jednotlivé cifry od 0 po $n - 1$.

Úlohy

1) V názve tejto učebnice na obálke je skryté rímske číslo. Ktoré? (V takýchto úlohách nepoužívame novšie zápisy, v ktorých sa odpočítava. Znaky sa iba sčítavajú. To znamená, že aj v prípade, že bude I pred V, je to to isté ako VI a to je 6.)
2) Vytvorte krátky nápis, do ktorého bude zakomponovaný rok vášho narodenia zapísaný rímskym číslom.
3) Prepíšte nasledujúce starogrécke čísla do súčasnej podoby: φ′ϛ′η′ a ,θ′ω′π′.
4) Napíšte tri príklady kultúr, v ktorých vznikol znak pre nulu.
5) Skúste vysvetliť, prečo v semipozičných číselných sústavách vznikla potreba vyvinúť znak pre nulu.
6) Prečo nie sú mayské čísla plne pozičnou sústavou?
7) Kde vznikla súčasná pozičná desiatková číselná sústava?
8) Kde vznikla semipozičná sústava, ktorá je pôvodcom delenia hodiny na minúty, minúty na sekundy…?
9) Uveďte aspoň tri príklady semipozičných číselných sústav v histórii ľudstva s rôznymi základmi.
10) Prepíšte nasledujúce čísla do desiatkovej číselnej sústavy: 112_3, 101010_2, 5301_6.
11) Zapíšte číslo 81 do dvojkovej, šestnástkovej a deviatkovej číselnej sústavy.
12) Ktoré z nasledujúcich zápisov nie je platné označenie čísla: 10111_3, 5690_{12}, 583_6, 31_{11}, $5a8d_{16}$? Vysvetlite, prečo.
13) Povedzme, že v Mayskom kalendári je napísané číslo ako tri nad sebou umiestnené vodorovné čiarky. Medzi čiarkami je rovnaká medzera. Je tento zápis jednoznačný?
14) Mayovia používali dvadsiatkovú číselnú sústavu. Koľkociferné by bolo číslo 6100 v mayských číslach?
15) Koľkociferné by bolo číslo 6100 v päťkovej číselnej sústave?
16) Aké je najväčšie 8-ciferné číslo v dvojkovej číselnej sústave?

Riešenia

1) DCCLVI = 756
2) Ak by bol rok narodenia napríklad 2007, čo sa v rímskych číslach zapíše ako MMVII, tak stačí vymyslieť niečo ako: „asI MáM Inú Vedomosť.“ Na poradí písmen nezáleží, iba tie, ktoré sú číslami, musia byť nejako vyznačené – v tomto prípade ako veľké písmená.
3) 568 a 9880
4) Mayovia – prázdna lastúra, Mezopotámia – bodka na konci vety, India – krúžok
5) V semipozičných sústavách je hodnota čísla závislá aj od pozície znakov a ak je niektorá pozícia prázdna, treba to nejako označiť, aby nevznikali nejasné zápisy.
6) Pretože nemajú samostatné znaky pre čísla jeden až 19. Tvoria ich nepozičným spôsobom.
7) V Indii.
8) V Mezopotámii – mala základ 60.
9) Mayská – 20, Mezopotámska – 60, Čínska – 10
10) 14, 42, 1189
11) 1010001_2, 51_{16}, 100_9
12) 583_6, pretože šestková sústava obsahuje iba číslice 0, 1, 2, 3, 4, 5.
13) Nie je. Môže ísť o číslo 15, ak sú tie tri čiarky na tej istej pozícii, ale aj o číslo $5 \cdot 400 + 5 \cdot 20 + 5 = 2105$, ak sú každá na inej pozícii.
14) $6100 = 15 \cdot 400 + 2 \cdot 20 + 0$, takže trojciferné.
15) Stačí zistiť, koľko mocnín päťky potrebujeme: 1, 5, 25, 125, 625, 3125 – 6-ciferné.
16) Mocniny dvojky: 0, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Ďalšia je 256 – to je prvé deväťciferné číslo. Takže najväčšie osemciferné je 255.

II. Prirodzené čísla

V tejto kapitole sa zoznámime s prirodzenými číslami, ktoré sú pre človeka najprirodzenejším spôsobom vyjadrenia počtu. Preskúmame, čo do množiny prirodzených čísel patrí, ako ju možno definovať z hľadiska matematiky aj vývinu dieťaťa. Ukážeme si rozdiely medzi kardinálnym a ordinálnym významom čísla, predstavíme rôzne modely prirodzeného čísla a pozrieme sa aj na to, ako sa dieťa krok za krokom dostáva k abstraktnému chápaniu čísel. V neposlednom rade sa dotkneme aj nekonečna a otázky: Koľko je vlastne prirodzených čísel?

Prirodzené čísla sú prvými, s ktorými sa stretávame nielen vo vývoji ľudstva, ale aj vo vývine jednotlivca. V oboch prípadoch vznikli prirodzené čísla postupne od tých najmenších čísel ako odpoveď na potrebu vyjadriť počet predmetov. U malých detí môžeme pozorovať, ako sa ich množina prirodzených čísel postupne zväčšuje pridávaním väčších a väčších čísel. Napokon, aj z predchádzajúcej kapitoly je zrejmé, že ľudstvo poznalo spočiatku len obmedzené množstvo prirodzených čísel, ktoré stačili bežným ľuďom vyjadrovať bežné kvantity.

Množina prirodzených čísel

Množina všetkých prirodzených čísel sa označuje veľkým písmenom $\mathbb{N}$, ktoré sa zapisuje v špeciálnom matematickom štýle zvanom *„blackboard bold“* alebo *„doublestruck.“* Tento štýl sa používa na označenie špeciálnych množín. N je odvodené z anglického *„natural.“* Tu treba poznamenať, že pod pojmom množina prirodzených čísel niekedy chápeme množinu, ktorej prvým prvkom je nula a niekedy množinu, ktorej prvým prvkom je jednotka. Preto poznáme dve množiny prirodzených čísel. **Prirodzené čísla s nulou** $\mathbb{N}_0$ a **prirodzené čísla bez nuly** $\mathbb{N}$.

Množina prirodzených čísel sa najčastejšie definuje pomocou tzv. **nasledovníka.** To znamená, že prijmeme prvé prirodzené číslo a povieme, že číslo o jednotku väčšie bude jeho nasledovníkom. Označíme ho $S(n)$. Základné vlastnosti z tohto poňatia vychádzajúce sú zhrnuté do Peanových axióm. (Ich autorom bol Giuseppe Peano 1858 – 1932.) Pripomíname, že axiómy sú základné tvrdenia, ktoré sa nedokazujú. Prijímajú sa ako pravdivé a na nich sú postavené ďalšie vety. Poznáme päť základných Peanových axióm:

P1: $0 \in \mathbb{N}_0$ (Nula patrí do množiny prirodzených čísel.)

P2: $n \in \mathbb{N}_0 \Longrightarrow S(n) \in \mathbb{N}_0$ (Ak číslo *n* je prirodzené, tak aj jeho nasledovník je prirodzené číslo.)

P3: $n \in \mathbb{N}_0 \Longrightarrow S(n) \neq 0$ (Nula nie je nasledovníkom žiadneho prirodzeného čísla.)

P4: $m, n \in \mathbb{N}_0 \wedge S(m) = S(n) \Longrightarrow m = n$ (Ak majú dve prirodzené čísla zhodných nasledovníkov, musia byť aj tieto dve čísla zhodné.)

P5: $M \subset \mathbb{N}_0, 0 \in M \wedge (n \in M \Longrightarrow S(n) \in M) \Longrightarrow M = \mathbb{N}_0$ (Ak pre nejakú podmnožinu, ktorá obsahuje nulu, množiny prirodzených čísel platí, že pre každý jej prvok je platné, že aj jeho nasledovník patrí do tejto množiny, tak táto množina je totožná s množinou prirodzených čísel.)

Keď k týmto piatim axiómam pridáme ešte axiómy o sčítaní a násobení, dostávame kompletnú Peanovu aritmetiku, teda úplný formálny základ prirodzených čísel.

Sčítanie

P6: $n \in \mathbb{N}_0 \Longrightarrow n + 0 = n,$

P7: $m, n \in \mathbb{N}_0 \Longrightarrow m + S(n) = S(m + n).$

Axióma P7 hovorí, že súčtom čísla *m* a nasledovníka čísla *n* je nasledovník ich súčtu. Prepísané bežným spôsobom: $m + (n + 1) = (m + n) + 1.$

Násobenie

P8: $n \in \mathbb{N}_0 \Longrightarrow n \cdot 0 = 0,$

P9: $m, n \in \mathbb{N}_0 \Longrightarrow m \cdot S(n) = m \cdot n + m.$

Pre úplnosť prepíšeme poslednú axiómu pomocou operácie +1 namiesto nasledovníka: $m(n + 1) = m \cdot n + m.$

Druhý prístup zavedenia prirodzených čísel je množinový. Prirodzené čísla sa definujú ako počet prvkov nejakej konečnej množiny. Nula je počtom prvkov prázdnej množiny. Jednotka je počet prvkov množiny, ktorá obsahuje iba jeden prvok – prázdnu množinu, dvojka je počet prvkov množiny, ktorá je zjednotením predchádzajúcej množiny a množiny, ktorá obsahuje túto predchádzajúcu množinu atď.

0 = {}

1 = {{}}

2 = { {}, {{}} }

3 = { {}, {{}}, { {}, {{}} } }

…

Dôležité je poznamenať, že prirodzené číslo môžeme chápať ako počet prvkov množiny iba vtedy, ak je táto množina konečná, t. j. má konečne veľa prvkov. Túto myšlienku bližšie rozoberieme v nasledujúcej kapitole.

Počet prirodzených čísel

Ktovie, kedy presne vznikla otázka, koľko je všetkých prirodzených čísel. Dnes vieme, že ich je nekonečne veľa. Najmenších školákov stále táto myšlienka fascinuje. Je to totiž prvé stretnutie dieťaťa s nekonečnom. Počet prirodzených čísel, predstava, ako môžeme donekonečna pridávať ďalšie a ďalšie číslo bez obmedzenia, to je niečo, čo sa v bežnom živote nevyskytuje.

Matematicky by sme mohli ľahko dokázať, že počet prirodzených čísel je skutočne nekonečný. Uvedieme len základnú myšlienku dôkazu sporom: Predpokladajme opak – prirodzených čísel je konečne veľa. Potom ale existuje najväčšie z nich. K tomuto najväčšiemu číslu vieme pripočítať jednotku, čím dostaneme číslo, o ktorom vieme dokázať, že je väčšie. Podľa predpokladu ale nemôže patriť medzi prirodzené čísla, ale ono prirodzeným číslom je. To je spor s predpokladom, takže platí pôvodné tvrdenie, že prirodzených čísel je nekonečne veľa.

Ako veľké je toto nekonečno? Je aj nekonečno prirodzené číslo? Je nekonečno to najväčšie prirodzené číslo?

Nekonečno nie je prirodzené číslo, môžeme ho nazvať kardinálnym číslom, ktoré označuje počet všetkých prirodzených čísel, ale samo prirodzeným číslom nie je. Neplatia preň ani základné vlastnosti, ktoré prirodzené čísla majú. Keď k nekonečnu pripočítame jednotku, nezväčší sa, zostane stále rovnaké. Prečo a ako to funguje?

O početnosti množín musíme vedieť jednu vec – počet prvkov dvoch množín je rovnaký, ak vieme vytvoriť jedno jednoznačné (bijektívne) priradenie prvkov jednej množiny k prvkom druhej množiny. Predstaviť si to môžeme napríklad tak, že jedna množina bude množinou izieb v hoteli a druhú množinu budú tvoriť hostia. Ak sa podarí ubytovať všetkých hostí tak, že v každej izbe bude presne jeden hosť, tak izieb aj hostí je rovnako veľa. Tento prostý princíp vieme použiť aj na nekonečné množiny. A teraz sa vrátime k tomu, prečo je nekonečno + 1 stále to isté nekonečno. Námet pochádza z prednášok Davida Hilberta (Hilbert, 2013).

Máme nekonečne veľa izieb – môžu byť napríklad očíslované číslami od 1, 2, 3, …, ale hostia sú očíslovaní číslami od 2, 3, … Je hostí o jedného menej? Predchádzajúci odsek nás naučil, že ak vieme hostí ubytovať tak, aby sa

obsadili všetky izby, tak je ich rovnako veľa. A my to spraviť vieme – jednoducho každý hosť bude bývať v izbe, ktorá má o jednotku menšiu hodnotu ako číslo, ktoré mu bolo pridelené. Hosť číslo 2 bude bývať na jednotke, hosť číslo 3 na dvojke atď. Keďže sme našli spôsob, ako to urobiť, tak ich musí byť rovnako veľa.

Rovnako vieme ukázať aj zaujímavejšie tvrdenia – párnych čísel je rovnako veľa ako všetkých prirodzených čísel. Intuícia nám možno navráva, že ich je predsa polovica, ale pozor! Polovica z nekonečna je zasa nekonečno! Každý hosť bude bývať v izbe, ktorej číslo je polovicou prideleného čísla daného hosťa. Hosť číslo 2 bude bývať na jednotke, hosť číslo 4 na dvojke, hosť číslo 6 na trojke, hosť číslo 100 na izbe číslo 50 atď. Takto bezpochyby obsadíme všetky izby práve jedným hosťom.

V skutočnosti je počet všetkých prirodzených čísel to najmenšie nekonečno, a preto **každá jeho nekonečná podmnožina má presne toľko isto prvkov ako celá množina prirodzených čísel.**

Jednoduché vysvetlenie na príklade nekonečného hotela nájdete napr. aj na tejto stránke: https://www.jankafialka.sk/?p=70, ktorá čerpala inšpiráciu z knihy *Rozhovory o množinách* (Vilenkin, N. J., 1972).

Vývin pohľadu na prirodzené číslo u dieťaťa

Pre nás dospelých je prirodzené číslo pomerne abstraktným pojmom. Vieme si pod ním predstaviť konkrétny model – päťka je počet prstov aj číslo na dome podľa situácie, ale celkom dobre vieme pracovať s päťkou aj bez akejkoľvek konkrétnej predstavy. Toto je úroveň, ku ktorej sme sa všetci museli dopracovať pomocou mnohých pozorovaní a úvah, na ktoré sme už možno aj zabudli. Učiteľ matematiky túto cestu musí poznať, aby porozumel svojim žiakom a pomohol im napredovať.

Poznávací proces (nielen pokiaľ ide o čísla) je v konštruktivistickom chápaní podľa Milana Hejného členený do piatich fáz:

1. **Motivácia** – aby vôbec mohlo poznávanie začať, musí byť dieťa motivované. Tu máme, samozrejme, na mysli vnútornú motiváciu vychádzajúcu z rozporu – toto neviem, ale chcem to vedieť. V prípade čísel je to napríklad situácia, kedy dieťa vidí sedem guľôčok, ale vie napočítať iba do päť. Vznikne vnútorné napätie, pretože dieťa chce povedať, koľko ich tam vidí, ale vhodný pojem v svojej slovnej zásobe nenachádza.

2. **Izolované modely** – v tejto fáze sa dieťa postupne oboznamuje s rôznorodými modelmi čísel. Vidí dve kolesá, dve jabĺčka, dvojku na výťahu. Čím je týchto skúseností viac, tým skôr sa začnú prepájať až príde k tzv. prvému abstrakčnému zdvihu, ktorý posunie poznávací proces do tretej fázy:
3. **Univerzálne modely** – dieťa už vie, že dvojka je spoločným pojmom pre všetky prípady izolovaných modelov. Že všetky tieto konkrétne modely sú v nej skryté a dokáže s ňou pracovať. Pri ťažších úlohách sa môže oprieť o niektorý vhodný izolovaný model. Ak potrebuje sčítať dve a dve, nemá problém zvoliť si izolovaný model – napríklad dva prsty a pomocou neho úlohu vyriešiť. Chápe, že tento výsledok nie je závislý od voľby modelu. Ak by si vybralo dve guľôčky, určite by mu vyšiel rovnaký výsledok.
4. **Abstraktné poznatky** – po nazhromaždení veľkého množstva univerzálnych modelov prichádza druhý abstrakčný zdvih, ktorý vytvorí abstraktný poznatok. Väčšina matematických viet je abstraktných, a preto nevhodných pre dieťa, ktoré neprešlo predchádzajúcimi fázami. Učiteľ nemôže prísť za prvákmi a povedať im, že súčet dvoch párnych čísel je vždy párny, pretože tieto deti ešte nemajú abstraktný poznatok pojmu párne číslo.
5. **Kryštalizácia** – posledná fáza poznávacieho procesu je veľmi dôležitá. Žiadny poznatok nie je hotový. Keď sa niečo naučíme, nie je to vytesané niekde v našich hlavách a uložené navždy. Každý poznatok sa neustále preveruje, upravuje, dopĺňa. Do univerzálnych modelov sa pridávajú nové izolované modely. Napríklad, ak sa dieťa prvýkrát stretne s číslom ako poradím až potom, čo už má vytvorený model čísla len na základe modelov množstevných, preverí, či je tento model v súlade s jeho doterajšou predstavou. Ak áno, pridá ho, ak nie, musí pretvoriť celú poznatkovú štruktúru tak, aby nevznikali rozpory.

Kvalitné poznatky teda nevznikajú prenesením. Ak dieťaťu odovzdáme hotový abstraktný poznatok a ono si ho zapamätá, vznikne formálny poznatok. Tento poznatok je často uložený len ako pamäťový záznam a dieťa ho nedokáže využiť pri riešení úloh, s ktorými sa ešte nestretlo. Ak chceme, aby dieťa získalo daný abstraktný poznatok, musí samo prejsť celú cestu od motivácie, izolovaných modelov, cez univerzálne modely až po abstraktný poznatok a jeho kryštalizáciu. To je dlhá cesta a nie vždy je na ňu čas. Dobrá správa ale je, že ak deti majú veľa skúseností s vytvorením abstraktného poznatku týmto spôsobom, dokážu aj prinesený hotový abstraktný poznatok začleniť do svojej poznatkovej štruktúry tým, že si sami dotvoria izolované a univerzálne modely.

Modely prirodzeného čísla

Najčastejšie sa stretávame s tvrdením, že čísla sa vyskytujú v dvoch základných podobách – číslo ako množstvo, inými slovami kvantita (kardinálne číslo) a číslo ako poradie (ordinálne číslo).

Základný rozdiel je v tom, že číslo buď označuje počet niečoho, množstvo guľôčok, počet krokov, ktoré musím urobiť – vtedy je číslo vo význame kvantity – **kardinálne číslo.** Práve tieto modely používame prednostne na zavádzanie základných aritmetických operácií – sčítanie ako pridávanie, odčítanie ako odoberanie.

Číslo vo význame poradia – **ordinálne číslo** – má súvislosť s množstvom. Napríklad označíme domy na ulici číslami – prvý bude mať jednotku, ďalší dvojku atď. Potom číslo domu zároveň hovorí o tom, koľko domov (vrátane tohto) sa nachádza na ulici pred ním. Podobne môžeme označiť krokovací pás, poschodia, políčka v hre *Človeče, nezlob se!* a operácie zavádzať cez operátory, ktoré už sú vo význame kvantity – o koľko sa posuniem? Takéto modely sa nazývajú adresno-operátorové a sú vhodným doplnením štandardných množstevných modelov.

ROLE ČÍSEL V REALITĚ			OTÁZKA	PŘÍKLADY
1	STAV	POČET	KOLIK?	20 kuliček, 3 hrnky, 1 000 000 obyvatel
2		POŘADÍ	KOLIKÁTÝ?	3. místo, 5. měsíc
3		MÍRA	KOLIK?	10 cm, 250 Kč, 23 °C, 8 m^3…
4	OPERÁTOR	ZMĚNY	O KOLIK?	odebrat 3 kusy, zmenšit 2 ×
5		POROVNÁNÍ	KOLIKRÁT?	vyšší o 6 cm, 3 × méně
6	OZNAČENÍ	ADRESA	KDE? KDY?	pozice šachové figurky, rok 2008
7		KÓD	CO?	68 (označení hráče), dálnice D1

Obrázok 14. Modely čísla (Hejný – Kuřina, 2015, s. 98)

S podrobnejším členením modelov čísel sa stretávame v publikácii *Dítě, škola a matematika* (Hejný – Kuřina, 2015) – pozri obrázok 14.

Tu sú modely čísel rozdelené do troch skupín:

1. Stav – číslo popisuje stav, určitú zatiaľ nemennú situáciu. Predchádzajúce delenie na kardinálne a ordinálne číslo je v tomto poňatí iba dvoma podskupinami tejto veľkej skupiny.

2. Operátor – číslo popisuje zmenu pôvodného stavu alebo porovnáva dva rôzne stavy.
3. Označenie v matematike nepoužívame tak často, ale nesmieme zabúdať, že dieťa vníma aj tieto čísla a bola by škoda nevyužiť ich na rôzne hry – „Nájdite auto, ktoré má najväčšie číslo v ŠPZ!“

Podrobnejšie rozoberieme model **adresa:** konkrétnych modelov čísel vo význame adresy nájdeme veľa. Nie vždy musí ísť o poradie, kde sa presne a postupne používajú všetky prirodzené čísla: čísla domov (párne vľavo a nepárne vpravo), dátum, rodné číslo (prvých 6 číslic, posledné štyri sú diskutabilné – ak sa prideľujú po poradí, ide o adresu, ak náhodne, tak je to iba kód).

Adresa môže byť **lineárna** – roky, čísla domov, alebo **cyklická** – hodiny, dni v týždni, dni v mesiaci. V modeli cyklická adresa sa po určitom počte čísel opäť vrátime k prvým číslam. Pekne to ilustruje napríklad posun o jednotku. Ak je nedeľa – siedmy deň v týždni – a my sa posunieme o jednotku, bude pondelok – prvý deň v týždni. V modeli lineárna adresa sa toto neudeje. Po najväčšom čísle je koniec, nevrátime sa zasa na začiatok. Ak sme na konci ulice, nemôžeme sa už posunúť o dom ďalej a zázračne sa objaviť na začiatku pri prvom dome. (Ak to nie je kruhová ulica 😊.)

V prípadoch, kedy číslo je už iba označením bez prepojenia na nejaké množstvo, hovoríme o čísle ako **kóde** a s takýmto číslom už nemá zmysel počítať. Typickým príkladom má byť nové rodné číslo, ktoré má byť úplne bezvýznamové – počítač každému občanovi náhodne pridelí desaťmiestne číslo.

Niekedy však číslo na prvý pohľad nemá žiadne prepojenie na konkrétne množstvo: napr. ŠPZ áut. Ak sa ale vyberieme na dopravný inšpektorát a zistíme spôsob prideľovania, uvidíme, že čísla sú prideľované postupne podľa jasne určeného systému, a preto by sme mohli aj ŠPZ považovať za konkrétny model lineárneho adresovania.

Na adresných modeloch prirodzených čísel sú postavené **adresno-operátorové modely,** ktoré sú veľmi vhodným nástrojom pri zavádzaní aritmetických operácií, ako je sčítanie a odčítanie. Najznámejším takýmto modelom je tzv. krokovanie – kedy dieťa používa krokovací pás, na ktorom sú vyznačené čísla. Tieto čísla sú teda adresným modelom a dieťa dostáva pokyny v podobe operátorov – o koľko sa má posunúť a ktorým smerom. Číslo, na ktorom skončí, sa stáva výsledkom operácie sčítania alebo odčítania. Je to úplne iný model ako klasický, kde číslo modelujeme ako množstvo, z ktorého odoberáme alebo pridávame. Dôvod, prečo je dôležité používať aj adresno-operátorové modely,

spočíva nielen vo variabilite skúseností, ale aj v možnosti jednoduchým spôsobom otvoriť cestu do čísel záporných. O tom sa viac dočítate v kapitole Celé čísla.

Čo si zapamätať?

- Prirodzené čísla vyjadrujú počet objektov alebo poradie a označujú sa $\mathbb{N}$ alebo $\mathbb{N}_0$ (bez nuly alebo s nulou).
- Existujú dva hlavné prístupy k ich definícii:
  - pomocou nasledovníka (Peanove axiómy),
  - pomocou počtu prvkov konečných množín.
- Počet prirodzených čísel je nekonečný, ale nekonečno nie je prirodzené číslo.
- Rovnaký počet prvkov môžu mať aj iné nekonečné množiny – dôležité je jednojednoznačné priradenie (napr. prirodzené vs. párne čísla).
- Dieťa prechádza v poznávacom procese zväčša týmito piatimi fázami: motivácia, izolované modely, univerzálne modely, abstraktné poznatky a kryštalizácia.
- Modely prirodzeného čísla môžeme deliť na:
  - Kvantitatívne (kardinálne) – počet objektov.
  - Poradové (ordinálne) – poradie v rade.

  Alebo podrobnejšie:
  - Stav – počet, poradie, miera
  - Operátor – zmeny, porovnania
  - Označenie – adresa (lineárna, cyklická), kód.
- Dôležité je kombinovať rôzne modely pri vyučovaní, aby deti vytvárali pevné abstraktné poznatky.

Úlohy

1) Ktorá množina má najviac prvkov: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ alebo množina všetkých nepárnych čísel?
2) V ktorej fáze poznávacieho procesu pokiaľ ide o sčítavanie prirodzených čísel sa nachádza dieťa, ktoré vidí, že dve a dve guľôčky sú spolu štyri, ale ak dostane dve a dve bábiky, musí si ich znovu prepočítať?
3) Vymyslite konkrétnu slovnú úlohu z prostredia dopravného inšpektorátu, kde použijete čísla ŠPZ ako model prirodzeného čísla vo význame lineárnej adresy.
4) Aký model čísla reprezentuje osemdesiatka na dopravnej značke zakazujúcej ísť vyššou rýchlosťou?
5) Aký model čísla reprezentuje dvanástka na hodinovom ciferníku?
6) Aký model čísla reprezentuje číslo futbalového hráča?
7) Vymyslite úlohu, v ktorej bude modelovaný príklad 4 + (alebo −) 2, pričom číslo 4 bude v podobe lineárnej adresy a 2 bude operátor porovnania.
8) Vymyslite úlohu, v ktorej bude modelovaný príklad 5 + (alebo −) 1, pričom číslo 5 bude v podobe počet a 1 bude operátor zmeny.
9) Ktoré z nasledujúcich príkladov sú príkladmi kardinálneho čísla: počet kariet v balíčku, označenie poschodia výškovej budovy, číslo autobusu, telefónne číslo?
10) Ktoré z predchádzajúcich príkladov sú príkladmi ordinálneho čísla?
11) Existuje najväčšie prirodzené číslo?
12) Hovoríme, že množina je uzavretá vzhľadom na nejakú operáciu, ak pre ľubovoľné jej dva prvky platí, že výsledok bude tiež patriť do tejto množiny. Pre ktoré z operácií: sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie je množina prirodzených čísel uzavretá?

Riešenia

1) Všetky tri spomenuté množiny majú rovnako veľa prvkov.
2) Vo fáze izolovaných modelov. Zatiaľ iba zbiera skúsenosti na konkrétnych modeloch čísel.
3) Napríklad: „Čakám v rade na inšpektoráte, predo mnou sedia ešte dvaja čakatelia na pridelenie novej ŠPZ. Práve vyšiel človek s novučičkou ŠPZ-tkou TT-078-TT, pred ním bola TT-077-TT, aké číslo dostanem?“ Odpoveď: TT-081-TT.
4) Stav – miera, pretože sa ňou myslí 80 km/h.
5) Označenie – adresa cyklická.
6) Označenie – kód.
7) Napríklad: „Bývam na štvrtom poschodí. Mama býva o dve poschodia vyššie (nižšie). Na ktorom poschodí býva mama?“ Odpoveď: na šiestom (na druhom).
8) Napríklad: „Mám 5 jabĺk. Sestra mi jedno pridá (zje). Koľko jabĺk budem mať?“ Odpoveď: 6 (4).
9) Počet kariet v balíčku.
10) Označenie poschodia výškovej budovy.
11) Najväčšie prirodzené číslo neexistuje.
12) Sčítanie a násobenie.

III. Celé čísla

Kapitola o celých číslach nadväzuje na predchádzajúce poznatky o prirodzených číslach a ukazuje, prečo sme ich museli rozšíriť o záporné čísla. Vysvetlíme si, ako sa dajú celé čísla matematicky konštruovať, ako sa objavili v histórii a ako s nimi pracovať pri výučbe. Spoznáme rôzne modely, ktoré pomáhajú deťom porozumieť nielen kladným, ale aj záporným číslam – napríklad pomocou guľôčok, krokovania alebo teplomeru. Dotkneme sa aj pojmu absolútna hodnota a pozrieme sa, ako sa záporné čísla postupne prijímali v matematike aj v školách.

Množina celých čísel

Množina celých čísel je tým najjednoduchším rozšírením množiny prirodzených čísel. Množina všetkých celých čísel sa označuje písmenom $\mathbb{Z}$ (z nemeckého *zahlen*). Najpoužívanejšie podmnožiny sú: $\mathbb{Z}^-$ ako množina záporných celých čísel, $\mathbb{Z}_0^-$ ako množina záporných celých čísel s nulou. Môžeme tiež napísať $\mathbb{Z}^+$ a $\mathbb{Z}_0^+$ ako množina kladných celých čísel a kladných celých čísel aj s nulou. Tieto sú ale totožné s množinami $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}_0$. Stretnúť sa môžeme s oboma zápismi.

Počet celých čísel

Celých čísel by malo byť dvakrát toľko ako prirodzených čísel. Prirodzených čísel je nekonečne veľa a z predchádzajúcej kapitoly vieme, že počítanie s nekonečnými číslami nefunguje tak isto ako s číslami konečnými. Takže to, že ich je dvakrát toľko, nie je postačujúca odpoveď. Musíme skúsiť, či ich náhodou nebude rovnako veľa. Ak áno, tak by sme mali byť schopní nájsť priradenie, pri ktorom každému celému číslu priradíme práve jedno prirodzené číslo. To, v skutočnosti, nie je žiaden problém. Stačí celé čísla zoradiť do takejto nekonečnej postupnosti: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots$ v tejto postupnosti sú všetky celé čísla a keďže je to postupnosť, každý prvok má svoje poradové číslo. Poradové čísla vytvárajú množinu prirodzených čísel. Takže celých čísel je skutočne tak isto veľa ako prirodzených čísel.

Poďme sa teraz pozrieť, ako sa v matematike konštruuje množina celých čísel pomocou relácie ekvivalencie na dvojiciach prirodzených čísel.

Konštrukcia množiny celých čísel

Ak by sme poznali iba prirodzené čísla, mali by sme jeden vážny problém. Množina prirodzených čísel nie je uzavretá vzhľadom na operáciu odčítania. To znamená, že keď vezmeme dve prirodzené čísla, výsledok odčítania nemusí patriť do množiny prirodzených čísel. To je dôvod, prečo potrebujeme množinu rozšíriť aj o záporné čísla.

V matematike je množina celých čísel definovaná cez triedy ekvivalencie usporiadaných dvojíc prirodzených čísel. Toto znie veľmi odborne. Poďme si to rozobrať.

Základom konštrukcie celých čísel je tzv. relácia ekvivalencie – to je istý typ relácie – teda vzťahu medzi dvoma prvkami, v tomto prípade medzi dvoma usporiadanými dvojicami prirodzených čísel. Usporiadaná dvojica znamená, že dvojice [1, 2] a [2, 1] sú rôzne. Záleží nám na poradí. A na množine všetkých možných takýchto usporiadaných dvojíc prirodzených čísel vytvoríme reláciu, ktorá hovorí, že dvojice $[a, b], [c, d]$ sú v relácii, ak platí $a + d = b + c$. Čo vlastne znamená, že $a - b = c - d$. Príklad: [3, 7] je v relácii s [0, 4] aj s [2, 6] a s nekonečným množstvom ďalších dvojíc, pre ktoré je druhý prvok o 4 väčší ako prvý prvok dvojice.

Táto relácia má také vlastnosti, ktoré ju robia reláciou ekvivalencie. Téme binárne relácie a ich vlastnosti sa hlbšie venujú iné publikácie (napr.: Híc – Pokorný, 2010). Každá relácia ekvivalencie vytvára na množine všetkých usporiadaných dvojíc prirodzených čísel triedy ekvivalencie – teda skupiny prvkov, ktoré budú tvoriť jeden celok – celé číslo. Napríklad dvojice [12, 13], [4, 5], [0, 1], … sú rôzne označenia toho istého celého čísla −1.

Záporné čísla v histórii

Historicky prvý národ používajúci záporné čísla bola staroveká Čína. Už v 20. stor. pred n. l. v knihe *Matematika v deviatich knihách* boli záporné čísla používané rovnako často ako kladné pri riešení sústav rovníc. Pri praktickom počítaní boli používané dva druhy počítacích paličiek: červené (cheng) označovali kladné čísla a čierne (fu) zasa záporné čísla. Toto farebné odlíšenie sa zachovalo aj v neskoršej kníhtlači.

V európskej matematike sa záporné čísla objavili oveľa neskôr. Pojem čísla ako takého bol často založený na geometrickom chápaní – čísla boli chápané ako dĺžky úsečiek, obsahy plôch a pri takomto nazeraní záporné čísla nedávajú zmysel. Úlohy, ktoré viedli k záporným výsledkom, sa jednoducho označili za

neriešiteľné. Až v 16. storočí sa postupne a veľmi pomaly začali záporné čísla uznávať za platné.

Tento obrovský rozdiel medzi východnou a západnou matematikou bol zrejme spôsobený používaním rozdielnych modelov čísel. Modelom prirodzených čísel sme venovali poslednú podkapitolu predchádzajúcej kapitoly. Teraz zavedieme modely, ktoré sú od nich odvodené a dajú sa dobre použiť aj na celé čísla.

Modely celého čísla

Na tomto mieste spomenieme dva základné navzájom radikálne odlišné pohľady na celé číslo. V didaktickej praxi aj tu platí, že pre správne pochopenie celých čísel je vhodné, aby žiaci poznali oba.

Opozitné množstevné modely

Podstatou týchto modelov je reprezentácia čísel množstvom, pričom ale poznáme dva typy čísel, ktoré sú opačnej kvality. V starovekej Číne pracovali s takouto predstavou celého čísla a museli poznať aj skutočnosť, že jedna čierna palička s jednou červenou dávajú spolu nulu – navzájom sa zrušia – ako hmota s antihmotou.

Model guľôčky: zmiznutie dvojice opozitných predmetov sa znázorňuje ťažšie, ale pomocou digitálnych technológií to nie je problém – viď https://www.jankafialka.sk/?page_id=32. Táto aplikácia názorne ukazuje, že každé celé číslo môže byť reprezentované rôznymi dvojicami prirodzených čísel. Kladné čísla sú červené guľôčky, záporné čísla modré guľôčky. Číslo −1 môže byť jedna modrá guľôčka alebo dve modré a jedna červená alebo tri modré a dve červené atď. Opačné guľôčky (modrá s červenou) sa totiž po stretnutí navzájom zrušia a zasa naopak kedykoľvek môžeme pridať dvojicu červená – modrá bez zmeny hodnoty daného celého čísla. Všimnime si podobnosť s postupom, ako je množina celých čísel skonštruovaná z množiny prirodzených čísel pomocou usporiadaných dvojíc.

Ďalším príkladom opozitného množstevného modelu môžu byť napr.: **kredit a debet** na účte (tu je ale problém so znázornením situácie 2 − (−3): Ako môžem odobrať dlh 3 eurá, keď som mal na účte 2 eurá? Museli by sme si stav účtu predstavovať dvojicou čísel – napríklad máme debetnú a kreditnú kartu. Na debetnej máme 2 eurá a na kreditnej 0 (kreditná karta určuje náš dlh voči banke). Náš majetok je teda 2 eurá. To by ale bol aj v prípade, keby sme mali na kreditnej karte 3 eurá a na debetnej 5 eur. Teraz môžeme dlh 3 eurá odobrať…

Ako ilustrovať operácie sčítania a odčítania na opozitných množstevných modeloch v stručnosti popíšeme na príklade modrých a červených guľôčok.

Sčítanie = „pridávanie.“ Napr. 2 + (−3) zakreslíme ako dve červené guľôčky, ku ktorým pridáme tri modré. Po vzájomnom zrušení dvoch dvojíc vidíme, že zostane jedna modrá = −1.

Odčítanie = „odoberanie.“ Tu môže nastať problém, že nemáme čo odoberať. Vtedy si pomáhame pridaním ďalších dvojíc červená – modrá. Napr.: 2 − (−3) zakreslíme 2 červené guľôčky. Máme odobrať 3 modré, ktoré ale nemáme. Takže pridáme k dvom červeným ešte tri dvojice modrá – červená a teraz už môžeme 3 modré odobrať. Zostane 5 červených.

Násobenie vieme zasa znázorniť pomocou modelu **majetok – dlh,** kde násobenie kladným číslom je opakované pridávanie a násobenie záporným číslom opakované odoberanie. Napríklad 3 · (−5) je dlh, ktorý sa trikrát pridal 3 · (−5) = (−5) + (−5) + (−5), takže výsledok bude −15. V príklade (−2) · 4 je dvakrát odobratie majetku (−2) · 4 = − 4 − 4, čiže −8. Nakoniec (−3) · (−6) je trikrát odobraný dlh, čo majetok navýši. (−3) · (−6) = − (−6) − (−6) − (−6), preto bude hodnota +18.

Adresno-operátorové modely

V týchto typoch modelov máme niekoľko typov čísel – prvé číslo je adresou – miestom na číselnej osi. Výsledok bude znova adresou. Ďalej sa tu budú nachádzať čísla v podobe operátorov, a to dvoch odlišných opačných kvalít.

Najznámejším adresno-operátorovým modelom je **krokovanie.** V tomto modeli sú operátory dané ako počet krokov dopredu, ak je operátor kladný a počet cúvacích krokov, ak je operátor záporný.

Základné postavenie je také, že sa pozeráme smerom ku kladnému nekonečnu.

Sčítanie je definované ako pohyb vpred – pridanie ďalšieho príkazu.

Odčítanie ako otočka. Takže, ak sme sa pozerali smerom ku kladnému nekonečnu, mínus spôsobí, že sa pozeráme smerom k zápornému nekonečnu.

Príklad 2 + (−3) reprezentuje situáciu – stojím na dvojke a potom urobím tri cúvacie kroky.

Príklad 2 − 3 reprezentuje odlišnú situáciu – stojím na dvojke, otočím sa smerom k záporným číslam a pokračujem tri kroky vpred. (Výsledok je, samozrejme, rovnaký ako v predchádzajúcom príklade.)

Takto môžeme znázorniť všetky typy situácií vrátane úloh typu: $-1-(-2)$. (Stojím na mínus jednej, otočím sa a cúvam dva kroky – cúvam teda smerom do kladných čísel a výsledok bude jednotka.)

Spomeňme ešte bežne sa vyskytujúci adresno-operátorový model **teplomer** alebo **výťah.** Pri týchto modeloch je prvé číslo znovu adresou. Operácia sčítania je posun hore alebo otepľovanie, operácia odčítania je posun dole alebo ochladzovanie. Problémom týchto modelov je však ich neúplnosť – operátory musia byť len kladné čísla – ťažko si predstavíme situáciu ochladenia o -2 stupne alebo posun o -2 poschodia. V didaktickej praxi sa takéto situácie vysvetľujú tak, že ochladenie o -2 stupne je oteplenie o 2 stupne, posun nahor o -2 poschodia je posun nadol o dve poschodia a pod. Čiže úlohy so záporným operátorom (druhým číslom) sa prevedú na úlohy s kladným operátorom podľa pravidiel:

$$a+(-b)=a-b$$

$$a-(-b)=a+b.$$

Kde *a, b* sú prirodzené čísla.

Dokážeme ale dieťaťu presvedčivo vysvetliť, prečo tieto pravidlá platia? Alebo ešte lepšie, vedeli by sme ho naviesť na to, aby si samo takéto pravidlá z modelu teplomer alebo výťah odvodilo?

Absolútna hodnota

S problematikou záporných čísel sa spája ešte jedna matematická operácia. Absolútna hodnota čísla je definovaná ako vzdialenosť čísla na číselnej osi od nuly. Preto je jej hodnota vždy kladná. Úlohy s absolútnou hodnotou riešia žiaci často intuitívne oveľa skôr, ako sa im tento pojem predstaví.

Už v prvých ročníkoch základnej školy riešia žiaci zadania, v ktorých je úlohou od väčšieho čísla odčítať menšie číslo. V skutočnosti toto je spôsob, ako sa obchádza skutočnosť, že množina prirodzených čísel nie je uzavretá vzhľadom na operáciu odčítania. Odčítanie sa mení na absolútnu hodnotu výsledku odčítania, ktorú hovorovo nazývame aj rozdielom dvoch čísel. V matematike je pojem rozdiel presne definovaný ako výsledok operácie odčítania, takže toto hovorové chápanie nie je v súlade so zaužívanými matematickými pojmami. V praxi sa ale využíva tak často, že ho nemôžeme úplne ignorovať. Matematicky korektnejšie by bolo nazývať túto operáciu vzdialenosťou dvoch čísel na číselnej osi.

Takto hovorovo chápaný rozdiel (alebo vzdialenosť čísel na číselnej osi) zapíšeme matematicky ako $|a-b|$, pričom výsledok nebude závisieť od

poradia, takže $|a-b| = |b-a|$. Žiak počíta tak, že najprv zistí, ktoré číslo je väčšie a od toho odpočíta to menšie.

Pri riešení úloh s absolútnou hodnotou si musíme dávať pozor, pretože majú často dve riešenia.

✐ *Vzdialenosť neznámeho čísla a čísla 3 na číselnej osi je 1. Aké je neznáme číslo?*

Matematicky by sme úlohu zapísali pomocou rovnice s absolútnou hodnotou $|3-x| = 1$. Rovnice tohto typu riešime buď metódou pokus – omyl, alebo rozdelením na dve možnosti: Buď $3-x=1$, alebo $x-3=1$. Z čoho vidíme, že táto rovnica má dve riešenia 2 a 4.

Čo si zapamätať?

- Celé čísla označujeme $\mathbb{Z}$ (z nemeckého „Zahlen“ = čísla).
- Obsahujú všetky prirodzené čísla, nulu aj ich záporné náprotivky.
- Počet celých čísel je rovnako nekonečný ako počet prirodzených čísel.
- Konštrukcia celých čísel sa dá urobiť pomocou usporiadaných dvojíc prirodzených čísel.
- Záporné čísla sa historicky používali najskôr v Číne pomocou farebných paličiek. V Európe boli dlho odmietané pre geometrické chápanie čísel ako dĺžok.
- Dva základné modely celých čísel:
    - Opozitné množstevné modely – guľôčky rôznych farieb sa rušia (kladné + záporné).
    - Adresno-operátorové modely – pohyb po číselnej osi (krokovanie, výťah, teplomer).
- Absolútna hodnota čísla je jeho vzdialenosť od nuly – vždy kladná.
- Rozdiel dvoch čísel sa často chápe ako absolútna hodnota ich rozdielu, hoci matematicky ide o „vzdialenosť.“
- Na pochopenie celých čísel je dôležité používať viacero modelov, ktoré dieťaťu umožnia vytvárať vlastné pravidlá a porozumenie.

Úlohy

1) Prečo nemá zmysel označenie $\mathbb{Z}_0$?
2) Ktorá z nasledujúcich množín má najviac prvkov? $\mathbb{Z}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Z}_0^+$
3) Ktorý model celého čísla sa najviac podobá na konštrukciu množiny celých čísel cez usporiadané dvojice prirodzených čísel?
4) Znázornite všetky typy nasledujúcich úloh na modeli guľôčky:
   a) $-6 + (-2)$,
   b) $-1 - 3$,
   c) $0 - (-5)$,
   d) $2 - 7$.
5) Znázornite všetky príklady z úlohy 4 na modeli krokovanie.
6) Znázornite všetky príklady z úlohy 4 na modeli teplomer.
7) Vzdialenosť neznámeho čísla a čísla 5 na číselnej osi je 7. Aké je neznáme číslo?
8) Ktoré z nasledujúcich dvojíc čísel zodpovedajú celému číslu 2? [2, 0], [0, 2], [10, 20], [245, 243].

Riešenia

1) Pretože množina $\mathbb{Z}$ obsahuje aj nulu.

2) Všetky majú rovnako veľa prvkov.

3) Akýkoľvek opozitný množstevný model.

4) Guľôčky – modré znamenajú záporné číslo, červené kladné.

a) Mám 6 modrých guľôčok a pridám ďalšie dve modré – výsledok bude 8 modrých.

b) Mám jednu modrú guľôčku a potrebujem odobrať tri červené, pridám teda tri dvojice červená – modrá, tri červené odoberiem, zostanú 4 modré.

c) Z ničoho mám vziať 5 modrých, takže si pridám 5 dvojíc modrá – červená, modré vezmem, zostane 5 červených.

d) Mám dve červené guľôčky, potrebujem odobrať 7 červených, dve vezmem bez problémov, ale ešte potrebujem vziať 5, takže si pridám 5 dvojíc červená – modrá, červené odoberiem, zostane 5 modrých.

5) Krokovanie:

a) Stojím na políčku číslo −6 a dva kroky cúvnem, prídem na −8.

b) Stojím na políčku číslo −1, otočím sa smerom k zápornému nekonečnu a idem tri kroky vpred, prídem na −4.

c) Stojím na nule, otočím sa smerom k záporným číslam a cúvam 5 krokov, prídem na políčko s číslom 5.

d) Stojím na dvojke, otočím sa smerom k záporným číslam a idem 7 krokov dopredu, prídem na číslo −5.

6) Teplomer:

a) Musíme použiť pravidlo $-6 + (-2) = -6 - 2$. Potom už len stačí predstaviť si, že vonku je −6 stupňov a o dva stupne sa ešte ochladí.

b) Je −1 stupňov a ochladí sa o 3 stupne.

c) Musíme použiť pravidlo $0 - (-5) = 0 + 5$. Takže je nula stupňov a oteplí sa o 5 stupňov.

d) Sú dva stupne nad nulou a ochladí sa o 7 stupňov.

7) −2 alebo 12.

8) Prvé a posledné.

IV. Racionálne čísla

Množinu racionálnych čísel potrebujeme preto, aby sme mohli bez problémov sčítať, odčítať, násobiť aj deliť. Vzhľadom na všetky tieto operácie je množina racionálnych čísel uzavretá. V tejto kapitole sa budeme venovať racionálnym číslam – číslam, ktoré môžeme zapísať vo forme zlomku s celočíselným čitateľom a nenulovým celočíselným menovateľom. Postupne si vysvetlíme, ako takéto čísla vznikajú, ukážeme rôzne zápisy racionálnych čísel (zlomky, desatinné čísla, percentá, pomery) a dôležité pravidlá pri práci so zlomkami. Zameriame sa tiež na to, prečo delenie nulou nedáva zmysel, predstavíme modely, na ktorých možno ilustrovať operácie so zlomkami a vysvetlíme pojem pomeru ako špeciálneho zápisu viacerých racionálnych čísel s rovnakým menovateľom.

Množina racionálnych čísel

Množina všetkých racionálnych čísel sa označuje veľkým písmenom $\mathbb{Q}$. Podobne, ako pri množine celých čísel, aj tu poznáme podmnožiny $\mathbb{Q}^+$ pre množinu kladných racionálnych čísel a $\mathbb{Q}^-$ pre množinu záporných racionálnych čísel. Prípadne aj verzie s nulou. Písmeno Q je použité z anglického *quotient* – *podiel*. A práve z toho vyplýva aj definícia čísel patriacich do tejto množiny: **Racionálne číslo je také číslo, ktoré možno zapísať v tvare zlomku, pričom čitateľ je ľubovoľné celé číslo a menovateľ je ľubovoľné nenulové celé číslo.**

Počet racionálnych čísel

Racionálne čísla tvoria ďalšiu nekonečnú množinu. Zatiaľ všetky, ktoré sme spomínali, mali rovnako veľa prvkov. Overme, či racionálnych čísel môže byť takisto veľa. Na prvý pohľad by sme mohli tvrdiť, že týchto bude viac, veď ako im môžeme priradiť nejaké poradie? Podľa veľkosti určite nie, pretože medzi akýmikoľvek dvoma racionálnymi číslami vieme vždy bez problémov nájsť ďalšie. Napr. medzi 0,12 a 0,13 máme napríklad 0,125.

Existuje ale iný spôsob. Vytvoríme tabuľku všetkých zlomkov – riadky tabuľky budú menovatele a stĺpce čitatele.

Na obrázku 15 vidíme tabuľku, ktorá obsahuje všetky možné kladné zlomky. Máme v nej nekonečno krát nekonečno prvkov. Ružová čiara znázorňuje

postupnosť, ako tieto zlomky vieme zoradiť, a preto môžeme tvrdiť, že počet kladných zlomkov je rovnaký ako počet prirodzených čísel. (Každý zlomok dostane poradové číslo, ktoré je prirodzeným číslom.)

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1
1/2	2/2	3/2	4/2	...
1/3	2/3	3/3	4/3	...
1/4	2/4	3/4	4/4	...
1/5	...	...	...	...

Obrázok 15. Racionálne čísla v postupnosti

Ľahko by sme mohli spomínanú postupnosť kladných zlomkov obohatiť aj o záporné zlomky podobne, ako sme dokázali, že celých čísel je rovnako veľa ako prirodzených.

Samozrejme, v tabuľke je každé racionálne číslo zastúpené nielen raz, pretože napríklad 1/2 je to isté racionálne číslo ako 2/4. My sme ale chceli dokázať, že racionálnych čísel nie je viac ako prirodzených a keďže sme našli množinu, ktorá obsahuje všetky racionálne čísla aj viackrát a tá má rovnako veľa prvkov ako množina prirodzených čísel, tak môžeme povedať, že racionálnych čísel nie je viac ako prirodzených. Avšak, keďže množina prirodzených čísel je podmnožinou množiny racionálnych čísel, tak platí: „Racionálnych čísel bude rovnako veľa.“

Všetky nekonečné množiny, s ktorými sme sa doteraz stretli, majú teda rovnako veľa prvkov. Týka sa to aj akýchkoľvek ich nekonečných podmnožín.

✐ *Aký je počet všetkých zlomkov, ktorých menovateľ obsahuje číslicu 2?*

Bude ich nekonečne veľa a keďže je to podmnožina množiny racionálnych čísel, tak presne toľko isto ako je prirodzených čísel.

Konštrukcia množiny racionálnych čísel

Množina racionálnych čísel má za svoje podmnožiny aj množiny celých čísel a množinu prirodzených čísel, čo znamená, že každé prirodzené alebo celé číslo je zároveň racionálnym číslom. Nadmnožinou množiny racionálnych čísel je množina reálnych čísel. Čísla, ktoré patria do množiny reálnych čísel, ale nie do množiny racionálnych čísel označujeme pojmom *iracionálne* čísla. Sú to napr.

čísla $\sqrt{2}$ – dĺžka uhlopriečky štvorca so stranou 1, π – obvod kruhu s priemerom 1 a iné.

V matematike je množina racionálnych čísel definovaná (veľmi podobne ako množina celých čísel v predchádzajúcej kapitole) cez triedy ekvivalencie usporiadaných dvojíc celých čísel s tým, že na druhom mieste nesmie byť nula. Racionálne čísla vznikajú ako naplnenie potreby zaviesť takú množinu, ktorá bude uzavretá aj vzhľadom na operáciu delenia, čo množina celých čísel nie je. Reláciou ekvivalencie je vzťah $a \cdot d = c \cdot b$ pre dvojice celých čísel $[a, b]$, $[c, d]$, ktoré si vieme celkom dobre predstaviť aj ako zlomky a/b a c/d. T. j. dvojice [2, 3] = [4, 6] = [−20, −30] =… sú rôzne označenia toho istého racionálneho čísla.

Množina racionálnych čísel je uzavretá vzhľadom na všetky základné matematické operácie: sčítanie, odčítanie, násobenie aj delenie. To znamená, že môžeme prevádzať akékoľvek z týchto operácií, vždy dostaneme výsledok, ktorý bude patriť do množiny racionálnych čísel.

Racionálne čísla na číselnej osi

Každé racionálne číslo sa dá umiestniť na číselnú os. Postup nájdenia presného umiestnenia je nasledovný. Rozdelíme úsečku medzi nulou a jednotkou na toľko častí, aký je menovateľ zlomku. Tým dostaneme umiestnenie zlomku $1/m$, Vzdialenosť tohto zlomku od nuly potom stačí naniesť toľkokrát, aký je čitateľ.

Keď si predstavíme všetky racionálne čísla umiestnené na číselnej osi, všimneme si dve zaujímavé vlastnosti: vždy vieme porovnať dve čísla podľa veľkosti, ale nemôžeme určiť, ktoré číslo je podľa veľkosti nasledujúce tak, ako to bolo v množine celých čísel. (Po čísle 2, je ďalším celým číslom číslo 3.) V množine racionálnych čísel **nie je možné určiť susedné číslo.** Ak by sme sa rozhodli pre akokoľvek blízke číslo, vždy vieme medzi týmito dvoma číslami nájsť ďalšie racionálne číslo. Napríklad hľadáme racionálne číslo, ktoré je najbližšie k číslu ½ a je od neho väčšie. Nech je naším prvým tipom číslo ¾. Ale medzi číslom ½ a ¾ leží určite číslo, ktoré je ich aritmetickým priemerom: $\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2} = \frac{5}{8}$. A aritmetický priemer dvoch racionálnych čísel je znova racionálne číslo, pretože ho získavame sčítaním týchto dvoch čísel a vydelením dvojkou. Takto môžeme pokračovať donekonečna. Nikdy nenájdeme medzeru. Takže nič ako susedné racionálne číslo (podľa veľkosti) nemôže existovať.

Zlomok

Racionálne čísla zapisujeme rôznymi spôsobmi. Za základný spôsob sa považuje tvar zlomku. Všetky ostatné vieme na tento tvar prepísať.

Zlomok je spôsob zápisu čísla pomocou dvojice celých čísel $\frac{a}{b}$, pričom a sa nazýva **čitateľ** zlomku, b **menovateľ** zlomku rôzny od nuly a tieto dve čísla sú oddelené **zlomkovou čiarou.**

Každé racionálne číslo sa dá zapísať nekonečným množstvom rôznych zlomkov, napr.:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{-2}{-3} = \frac{100}{150} = \cdots$$

Zlomok v základnom tvare je taký zlomok, v ktorom čitateľ a menovateľ majú najväčšieho spoločného deliteľa jednotku, t. j. sú nesúdeliteľné, NSD (a, b) = 1.

Krátenie zlomku je úprava zlomku na tvar, v ktorom zmenšíme čitateľa aj menovateľa vydelením spoločným deliteľom. $\frac{100/10}{150/10} = \frac{10}{15}$. Krátením najväčším spoločným deliteľom získame zlomok v základnom tvare. NSD (100, 150) = 50, $\frac{100/50}{150/50} = \frac{2}{3}$.

Rozširovanie zlomku je úprava, pri ktorej zväčšíme čitateľa a menovateľa násobením tým istým číslom. Túto úpravu používame, ak chceme sčítať alebo odčítať zlomky s rôznymi menovateľmi.

Krátenie a rozširovanie nemení hodnotu zlomku – je to len iný spôsob zápisu toho istého racionálneho čísla.

Kmeňový zlomok je zlomok, ktorého čitateľ je rovný 1. S týmito zlomkami sa žiaci stretávajú už na prvom stupni. Zápis $\frac{1}{3}$ potom znamená, že celok treba rozdeliť na tri rovnaké časti. Zápis $\frac{2}{3}$ už znamená, že potrebujeme urobiť dva kroky: rozdeliť celok na tri rovnaké časti a potom vziať dve z nich. Kmeňový zlomok je preto jednoduchší na pochopenie, pretože vyžaduje iba jednu akciu – deliť celok na určitý počet rovnakých častí.

✐ *Rozdeľte spravodlivo 5 pecňov chleba medzi 8 robotníkov.*

Táto slovná úloha nebude reálne riešená tak, že každému dáme $\frac{5}{8}$. Reálne je skôr riešenie, v ktorom každý dostane $\frac{1}{2}$, čím sme rozdelili 4 pecne a zvyšný peceň rozdelíme na 8 častí, takže každý bude mať $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

Takýmto spôsobom pracovali so zlomkami starovekí Egypťania (Bečvář, 2003). Vyskúšajte si, že každá takáto úloha vedie k riešeniu v tvare konečného súčtu

rôznych kmeňových zlomkov. (Obyčajne býva viac možných riešení.) V starovekom Egypte zapisovali kmeňové zlomky tak, že nad číslo označujúce menovateľa napísali špeciálnu značku. Čitateľa nijako zapisovať nepotrebovali, keďže bol vždy rovný jednotke. Jedinou výnimkou bol zlomok 2/3, ktorý mal špeciálne označenie. Práca s kmeňovými zlomkami je veľmi názorná a praktická, ale často sú výpočty zdĺhavé a náročné. Súčet je veľmi jednoduchý, rozdiel už nie, ak nemáme použité rovnaké kmeňové zlomky. Pre tieto výpočty používali starovekí Egypťania tabuľky, na ktorých mali napríklad uvedené rôzne spôsoby prepisu jedného kmeňového zlomku na súčet iných kmeňových zlomkov.

Zlomky znázorňujeme pomocou nasledujúcich modelov:

Kruhový model (koláč, pizza) – asi najnázornejší spôsob znázornenia jednoduchších zlomkov, ale rozdelenie kruhu na určený počet dielov (okrem niekoľkých málo výnimiek) si vyžaduje použitie uhlomeru.

Obdĺžnikový model (čokoláda) – obyčajne používame znázornenia, kde obdĺžnik už je rozdelený na určitý počet rovnakých dielikov.

Úsečkový model (lano, had, vláčik) – veľmi vhodnou aktivitou, pri ktorej používame úsečkový model, je práca s papierovými pásikmi. Máme určitý počet rovnakých pásikov – jednotiek a tieto delíme na časti, čím vytvárame iné kratšie pásiky, ktoré môžeme aj označovať farebne, či len nápisom – polovica, tretina, štvrtina. Deti takéto časti sami vytvárajú strihaním – úlohy na porovnávanie zlomkov, krátenie, rozširovanie, sčítavanie a odčítavanie sú potom riešiteľné manipuláciou s konkrétnymi modelmi – príslušnými pásikmi.

Množstevný model – celok je určený ako množina guľôčok, korálok, detí – volíme taký počet, aby bol deliteľný číslami, ktoré plánujeme v menovateľoch využívať. Napr. ak chceme pracovať so zlomkami s menovateľmi 2, 3, 4, 5, 6 zvolíme 30 prvkov, čiže najmenší spoločný násobok.

Na rôzne účely sa hodia rôzne modely, preto treba pracovať so všetkými a podľa okolností ich obmieňať.

Všetky činnosti so zlomkami: krátenie, rozširovanie, porovnávanie, sčítanie, odčítanie robia žiaci najprv na modeloch a až potom môžeme prejsť k použitiu algoritmov.

Desatinné číslo

Každý zlomok s celočíselným čitateľom a menovateľom (okrem nuly) je racionálnym číslom, ale nie každé desatinné číslo je racionálnym číslom. Desatinné čísla, ktoré majú konečný počet desatinných miest, sú všetky

racionálne. Prepísať ich na tvar desatinného zlomku je jednoduché. Napríklad: $0{,}351 = \frac{351}{1000}$.

To ale nie sú jediné desatinné čísla, ktoré sa dajú zapísať v tvare zlomku. Vieme, že 1/3 = 0,33333… Toto desatinné číslo má nekonečne veľa desatinných miest. Číslice na jednotlivých miestach sú všetky rovnaké. Je to teda periodické desatinné číslo. Ukážeme na troch príkladoch, že všetky periodické desatinné čísla sú racionálne (dajú sa prepísať na tvar zlomku). Označíme písmenom x racionálne číslo, ktoré hľadáme.

✐ *Príklad*: $0{,}77777 \ldots = x$

Túto rovnicu vynásobíme desiatkou:

$$7{,}77777 \ldots = 10x$$

Od druhej rovnice odpočítame prvú, čím sa zbavíme „nekonečného chvosta“:

$$7 = 9x$$

Takže $x = \frac{7}{9}$ alebo inak povedané: $0{,}7777 \ldots = \frac{7}{9}$.

Ak sa v desatinnom čísle opakuje viac ako jedna číslica, použijeme podobný postup s tým rozdielom, že násobiť budeme takou mocninou desiatky, ktorá zodpovedá počtu opakujúcich sa číslic.

✐ *Príklad:* $0{,}123123123123 \ldots = x$

V tomto čísle sa opakujú tri číslice, takže rovnicu vynásobíme tisícovkou.

$$123{,}123123123 \ldots = 1000x$$

Aj v tomto prípade stačí od druhej rovnice odpočítať prvú.

$$123 = 999x$$

Takže hľadaný zlomok je $x = \frac{123}{999}$.

✐ *Príklad*: $12{,}135454545454 \ldots = x$

Perióda je dvojciferná – používame násobenie číslom 100.

$$1213{,}54545454 = 100x$$

$$1213{,}54\overline{54} - 12{,}13\overline{54} = 99x$$

$$1201{,}41 = 99x$$

V čitateli vychádza desatinné číslo, preto potrebujeme ešte vynásobiť čitateľa a menovateľa mocninou desiatky tak, aby sme mali celé čísla.

$$x = \frac{1201{,}41}{99} = \frac{120141}{9900}$$

Kontrola správnosti je veľmi jednoduchá, stačí čitateľa vydeliť menovateľom a hneď vidíme, či sme počítali správne. Rovnako postupujeme kedykoľvek, keď chceme zlomok previesť na desatinné číslo, pretože zlomkovú čiaru skutočne môžeme považovať za iný zápis delenia. V mnohých krajinách sa aj bežné delenie označuje znakom / a nie dvojbodkou ako u nás. 5/2 znamená päť polovíc, ale aj päť delené dvomi.

Racionálnym číslom je teda každé desatinné číslo, ktoré má:

a) **konečný desatinný rozvoj** – takéto číslo ľahko prevedieme na tvar desatinného zlomku. Napr. 1,25 = 125/100. Následne sa niekedy dá krátením upraviť na zlomok v základnom tvare, ktorý už nie je desatinný, t. j. 125/100 = 5/4.
b) **periodický desatinný rozvoj** – takéto číslo je vždy možné upraviť na tvar zlomku. Používame pri tom vyššie uvedený postup.

Základné operácie s racionálnymi číslami v tvare desatinného čísla sa prevádzajú jednoduchšie ako v tvare zlomku – pretože v princípe ide o zlomky s rovnakými menovateľmi. Ak nie, ľahko ich na spoločného menovateľa prevedieme pridaním nuly: 0,12 + 0,2 = 0,12 + 0,20 = 0,32 t. j. 12/100 + 2/10 = 12/100 + 20/100 = 32/10.

V praxi sa vyskytujú úlohy s desatinnými číslami najmä pri počítaní peňazí. Tu však treba rozlišovať, či je úloha postavená tak, že dieťa pracuje s desatinnými číslami – cena tovaru je 2,5 eura – alebo pracuje s dvoma odlišnými hodnotami – eurami a centami – a každá je vyjadrená prirodzeným číslom – 2 eurá a 50 centov. Vhodné je začínať úlohami druhého typu, postupne viesť deti k pochopeniu súvislosti medzi hodnotou euro a cent (100 centov je 1 euro) a potom začínať vyjadrovať aj menšie hodnoty napr. 50 centov je pol eura, čo sa zapisuje aj ako 0,5 eura, 25 centov štvrť eura alebo 0,25. So zápisom v tvare desatinného čísla sa totiž deti bežne stretávajú pri nákupoch.

Percentá, promile

Percento je ešte jednoduchšia podoba racionálneho čísla, ktorého menovateľ je vždy 100. Promile má menovateľa 1000.

Percentá sa vyskytujú v mnohých slovných úlohách a deti sa s nimi stretávajú aj v bežnom živote – napr. „na 100 % to dopadne takto“, „50 % pre teba a 50 % pre mňa“, „urobil prácu na 200 %“, „zľava 10 %“…

Pri zadávaní slovnej úlohy, v ktorej sa vyskytnú percentá je vždy nutné zamyslieť sa nad tým, **čo je základ (čo je 100 %)?**

✐ *V triede je 20 detí. Chýba 5 % žiakov. Koľko žiakov chýba?*

Úloha nie je jednoznačná, pretože nevieme, či všetkých detí je 20 a z toho 5 percent chýba alebo do triedy chodí nejaký počet žiakov, z nich 5 percent chýba a zvyšok je 20 detí. Úloha sa dá chápať dvoma spôsobmi:

„Do triedy chodí 20 žiakov. Dnes 5 percent z nich chýba. Koľko žiakov chýba?“ Alebo: „Do triedy dnes prišlo 20 žiakov. Vieme, že 5 percent zo všetkých žiakov dnes chýba. Koľko žiakov chýba?“ Táto druhá nie je dobre zadaná, pretože výsledok nevyjde prirodzené číslo. Namiesto čísla 20 by bolo vhodnejšie použiť číslo 19 v zadaní.

Úlohy, kde sa vyskytuje **zmena stavu:** základom má byť pôvodný stav, napr.

✐ *Úspešnosť žiakov vo vstupnom teste bola 53 %. Vo výstupnom teste bola úspešnosť 82 %. O koľko percent sa zvýšila úspešnosť žiakov?*

Základ je vstupný test: 53 ..... 100 %

82 − 53 .... x %

Odpoveď: úspešnosť sa zvýšila o 54,7 %. Takáto odpoveď sa ale bežne nepoužíva, obyčajne čakáme odpoveď 29 **percentuálnych bodov.** Nikdy by sme nemali použiť termín percento, ale percentuálny bod. (Častá chyba aj v médiách.)

Dôvod, prečo sa nie vždy hodia percentuálne body môžeme vidieť napríklad pri porovnávaní zlepšovania žiakov.

✐ *Žiak A napísal vstupný test na 90 percent a výstupný na 100 percent. Žiak B napísal vstupný test na 10 percent a výstupný na 20 percent. Ktorý sa viac zlepšil?*

Obaja sa zlepšili o 10 percentuálnych bodov, ale prvý žiak sa zlepšil o 10/90 = 11 percent, kým druhý o 100 percent.

Percentá veľmi ľahko prevádzame na tvar desatinného čísla tak, že počet percent vydelíme číslom 100. Takže aj počítanie s percentami môžeme previesť na počítanie s desatinnými číslami. Napríklad 20 % z 15 je 0,2 · 15 = 3. Niektoré počty percent sa veľmi dobre prevádzajú aj na tvar zlomku. V predchádzajúcom príklade 20 % = 1/5 a preto 20 % z 15 je 15 / 5 = 3.

Pomer – delenie celku na nerovnaké časti

Pomer je zápis viacerých racionálnych čísel, pričom sú známe čitatele, menovateľ je spoločný a je presne súčtom všetkých daných čísel. T. j. pomer 2 : 3 : 5 znamená zápis troch zlomkov 2/10, 3/10 a 5/10.

Pomer sa vyskytuje v slovných úlohách typu:

1. **Zmesi:** zmiešavame sirup v pomere 1 : 10. *Koľko potrebujeme vody, ak máme 1 dl sirupu?* Ľahká otázka. *Koľko vody a koľko sirupu potrebujeme na 1 liter malinovky?* Ťažšia úloha, ktorú riešime pomocou znázornenia, ktoré nám jasne ukáže, že celkovo máme 11 dielov, z toho 1 diel, čiže 1/11 je sirup a zvyšok 10/11 voda.
2. **Mierka mapy:** s mierkou mapy pracujeme napr. pri zakresľovaní mapy, rozmiestnenia nábytku v triede. Mierku používame v nákresoch niečoho veľkého, čo potrebujeme zmenšiť, prípadne nákresu niečoho maličkého, čo potrebujeme zväčšiť – chrobáčik, baktéria. Úlohy takéhoto typu sú vďačným materiálom pre projektové vyučovanie s využitím medzipredmetových vzťahov.
3. **Skóre v športe:** často nie je chápané ako pomer, pretože výsledok zápasu 2 : 4 nie je ten istý ako 1 : 2, aj keď pomer je to ten istý.

Pomer sa dá, podobne ako zlomok upravovať násobením alebo delením všetkých čísel tým istým číslom. T. j. 2 : 3 je to isté ako 10 : 15, alebo 14 : 21. Funguje to preto, že pomer 2 : 3 je to isté ako $\frac{2}{5}$ a $\frac{3}{5}$ a keď oba rozšírim tým istým číslom (napr. päťkou), tak aj celkový počet dielov sa zväčší tým istým číslom, takže pomer zostane zachovaný 10 : 15 je v zlomkoch $\frac{10}{25}$ a $\frac{15}{25}$.

Pomer býva niekedy zmätočný kvôli tomu, že dvojbodku používame ako znak delenia, čo nás pletie. **V pomere dvojbodku nemožno zameniť za delenie** tak, ako sme mohli znak / pokojne považovať za zlomkovú čiaru aj za delenie. Preto sa v mnohých krajinách (aj v tejto učebnici) delenie bežne zapisuje znakom / a dvojbodka medzi číslami znamená iba pomer.

Čo si zapamätať?

- Množina racionálnych čísel je uzavretá vzhľadom na operácie sčítanie, odčítanie, násobenie aj delenie.
- Počet racionálnych čísel je rovnako nekonečný ako počet prirodzených čísel.
- Racionálne číslo je každé číslo, ktoré možno zapísať ako zlomok, kde čitateľ je celé číslo a menovateľ nenulové celé číslo.
- Všetky konečné a periodické desatinné čísla sú racionálne (dajú sa prepísať na zlomok). Percentá sa dajú zapísať ako zlomok s menovateľom 100.
- V menovateli zlomku nikdy nemôže byť nula.

- Každé racionálne číslo sa dá zapísať rôznymi zlomkami (napr. krátením alebo rozširovaním).
- Sčítanie, odčítanie, porovnávanie a iné činnosti so zlomkami žiakom vždy predstavujeme na modeloch.
- Pomer je vlastne zápis viacerých racionálnych čísel so spoločným menovateľom, pričom ich súčet tvorí tento menovateľ (napr. 2 : 3 : 5 znamená 2/10, 3/10, 5/10).

Úlohy

1) Koľko racionálnych čísel je väčších ako nula a menších ako 1?
2) Ktoré z nasledujúcich desatinných čísel nie sú racionálne? 0,34; 12,123123123…; 0,101001000100001000001…
3) Prepíšte číslo 12,123123123… na tvar zlomku.
4) Prepíšte číslo 7,84 na tvar zlomku.
5) Ktoré z nasledujúcich zápisov sú rovné číslu $\frac{1}{2}$? 0,5; $\frac{15}{30}$; 50 %
6) Napíšte zlomok $\frac{7}{12}$ ako súčet rôznych kmeňových zlomkov.
7) Napíšte zlomok $\frac{3}{7}$ ako súčet rôznych kmeňových zlomkov.
8) Chceme nakresliť kruhový model pre zlomky s menovateľom 5. Ako treba rozdeliť kruh?
9) Ako vysvetlíte dieťaťu, že šestina je väčšia ako sedmina?
10) Ak cena tovaru vzrástla o 10 % a následne o 10 % klesla, bude konečná cena rovnaká, vyššia alebo nižšia ako pôvodná?
11) Ktoré celé počty percent menších ako 100 % sa dajú zapísať zlomkom s menovateľom menším ako 10?
12) Čo je viac 25 % z 40 alebo 40 % z 25?
13) Rozdeľte 120 eur trom robotníkom v pomere 1 : 2 : 3.
14) Vzdialenosť dvoch miest na mape s mierkou 1 : 25000 je 12 cm. Aká je skutočná vzdialenosť týchto dvoch miest?
15) V sklade sa nachádza 50 kg zmesi kávy, v ktorej sú zmiešané dva druhy kávy A a B v pomere 2 : 3. Do zmesi sa primieša ďalších 20 kg kávy druhu A. V akom pomere budú druhy A a B v novej zmesi kávy?

Riešenia

1) Medzi nulou a jednotkou je nekonečne veľa racionálnych čísel a preto ich bude presne toľko ako prirodzených čísel.
2) To posledné – nie je periodické, ani nemá konečný desatinný rozvoj.
3) 12111/999, čo sa dá skrátiť na 4037/333.
4) 784/100.
5) Všetky.
6) 7 pecňov medzi 12 ľudí: Každému môžeme dať polovicu – 6 pecňov sa teda rozdelí, zostane jeden a ten rozdelíme na dvanástiny: $\frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$.
7) Tri pecne medzi 7 ľudí. Polovice nestačia. Musíme ich najskôr rozdeliť na tretiny alebo štvrtiny. Štvrtiny sú praktickejšie. Rozdelíme teda dva pecne na 8 štvrtín, rozdáme siedmim, poslednú štvrtinu ešte rozdelíme na sedem častí – to bude dvadsaťosmina pre každého a sedmina z posledného pecňa. $\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{7}$. Alebo s tretinami: Každý by dostal tretinu, ostali by dve tretiny z posledného pecňa a tie by sme podelili každú na štyri časti, čím by sme dostali osem dvanástin, sedem rozdáme a poslednú ešte rozdelíme na sedem častí: $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{84}$.
8) Stredový uhol každého dieliku musí byť pätinou z 365°, čiže 72°.
9) Znázornením na niektorom modeli alebo otázkou: „Ak máme dve rovnaké pizze, jedna sa rozdelí na 7 rovnakých častí a druhá na 6. Z ktorej si vyberieš svoj diel?“
10) Nižšia. Po prvotnom navýšení bola cena 1,1 *c* a z tejto ceny pokles o 10 % znamená výslednú cenu 0,99 *c*, takže bude o 1 % nižšia ako pôvodná.
11) Čísla, ktoré sú celými percentami: 50 % = $\frac{1}{2}$, 25 % = $\frac{1}{4}$, 75 % = $\frac{3}{4}$, 20 % = $\frac{1}{5}$, 40 % = $\frac{2}{5}$, 60 % = $\frac{3}{5}$, 80 % = $\frac{4}{5}$.
12) Rovnako 10.
13) 20, 40 a 60 eur.
14) 3 km.
15) 4 : 3.

V. Reálne čísla

V tejto kapitole sa zoznámime s množinou reálnych čísel, ktorá zahŕňa všetky doteraz spomínané číselné množiny – prirodzené, celé, racionálne, ale aj čísla, ktoré nie sú racionálne, tzv. iracionálne čísla. Ukážeme si, prečo je množina reálnych čísel oveľa početnejšia ako množina prirodzených alebo racionálnych čísel, a predstavíme si dôkaz tejto veľkosti prostredníctvom tzv. diagonálneho argumentu. Tiež si priblížime niektoré z najznámejších reálnych čísel, ktoré sú dôležité v matematike aj v praxi, ako sú odmocnina z dvoch, číslo π, zlatý rez či Eulerovo číslo.

Množina reálnych čísel

Množina reálnych čísel je nadmnožinou všetkých doteraz spomínaných množín. Schematicky môžeme vzťahy medzi základnými číselnými množinami zaznačiť takto:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Táto schéma hovorí, že prirodzené číslo – napríklad číslo 25 – patrí do množiny prirodzených, celých, racionálnych aj reálnych čísel. Číslo 0,9 patrí do množiny racionálnych a reálnych čísel. Číslo π iba do množiny reálnych čísel. V bežnej praxi sa stretávame takmer výlučne iba s racionálnymi číslami. Preto môžeme mať pocit, že množina iracionálnych čísel – čísel, ktoré sú reálne, ale nie racionálne, nebude veľká.

Počet reálnych čísel

Keďže množina reálnych čísel obsahuje všetky prvky množiny racionálnych čísel, určite bude počet reálnych čísel minimálne taký, ako počet prirodzených čísel. Doteraz všetky množiny boli presne také veľké. Množina reálnych čísel je ale väčšia. Počet reálnych čísel je „väčšie nekonečno“ ako počet prirodzených čísel a ukážeme to pomocou dôkazu sporom:

Desatinné číslo, ktoré má nekonečne veľa desatinných miest a nie je periodické, nazývame iracionálnym číslom. Napríklad $\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504880 \ldots$ Ak by bol počet taký, ako prirodzených čísel, vedeli by sme vytvoriť postupnosť, ktorá by obsahovala všetky reálne čísla. Dáme si dokonca ešte menší cieľ – zoradíme iba čísla medzi nulou a jednotkou. Nižšie vidíme príklad takéhoto zoznamu:

0,0123456789101112…

0,1123456789101112…

0,2123456789101112…

0,3123456789101112…

0,4123456789101112…

0,5123456789101112…

…

Zoznam môže byť naozaj akýkoľvek. Dôležité je, že má obsahovať všetky reálne čísla. Dôležitá poznámka: niektoré reálne čísla nemajú jednoznačný dekadický rozvoj. Číslo, ktoré má konečný desatinný rozvoj, možno zapísať *dvoma rozličnými spôsobmi*. Od určitého miesta môže postupnosť číslic v jeho zápise pozostávať zo samých núl alebo samých deviatok. Napr.: 0,2 = 0,200000… = 0,199999… V tomto zozname použijeme len prvý spôsob.

Teraz si vezmeme ten zoznam a ideme písať číslo tak, že napíšeme 0, a ďalšiu cifru dáme akúkoľvek inú, než aká je v prvom riadku na mieste desatín. Potom pozrieme v druhom riadku na miesto stotín a zapíšeme akúkoľvek inú cifru na miesto stotín. Takto vytvorené číslo v našom príklade by mohlo byť: 0,958706… Po prejdení všetkých nekonečno položiek zoznamu by sme mali napísané číslo, ktoré sa určite nezhoduje so žiadnym číslom v zozname, pretože s každým má minimálne jednu cifru rozdielnu. Ale to číslo je reálne. Takže zoznam očividne neobsahuje všetky reálne čísla, nech by sme ho spravili akýkoľvek. To znamená, že medzi číslami 0 a 1 je viac reálnych čísel, ako je všetkých prirodzených čísel. Toto nekonečno je väčšie.

Najznámejšie reálne čísla

Pytagorejci verili, že všetko na svete sa dá popísať racionálnymi číslami. Je to vlastne pochopiteľný predpoklad, keď vezmeme do úvahy fakt, že množina racionálnych čísel je uzavretá vzhľadom na všetky základné aritmetické operácie: sčítanie, odčítanie, násobenie aj delenie. Čiže, ak si vezmeme ľubovoľné racionálne čísla a prevádzame s nimi akékoľvek zo základných operácií, výsledok bude vždy racionálne číslo.

Racionálnym číslom nie je napr. číslo $\pi = 3{,}1415926\ldots$ alebo $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ Alebo akákoľvek odmocnina prvočísla. Iracionálne číslo vieme vytvoriť veľmi ľahko – každé desatinné číslo s nekonečným neperiodickým rozvojom bude iracionálne, napr.: 1,01001000100001… alebo 0,123456789101112131415… Tu sme postupovali tak, že sme použili nejakú

neperiodickú postupnosť a jej prvky použili ako cifry iracionálneho čísla. V tomto prípade môžeme použiť tvar desatinného čísla, pretože sa dá predvídať, aké cifry budú nasledovať.

Ak by sme vytvorili počítačový program, ktorý vytvára desatinné číslo nekonečne dlho tak, že náhodne vyberá číslice na každom mieste – jeho výsledok bude zaručene iracionálny. Racionálne čísla sú v skutočnosti len špeciálnymi výnimkami v nekonečnom mori reálnych čísel.

V tejto kapitole si priblížime niekoľko najznámejších reálnych čísel. Tieto čísla nepíšeme štandardne v tvare desatinného čísla, pretože tento zápis by bol nekonečný. Niekedy zapisujeme prvých niekoľko cifier preto, aby sme mali približnú predstavu o ich veľkosti, ale obyčajne majú tieto čísla vlastné označenie – buď pomocou operácie, ktorej výsledkom sú – číslo $\sqrt{2}$, alebo majú vlastné označenie – číslo π.

Odmocnina z dvoch

Možno prvým známym iracionálnym číslom bolo číslo, ktoré dnes označujeme ako $\sqrt{2}$. Objavilo sa ako dĺžka uhlopriečky štvorca s jednotkovou stranou. A viedlo k pádu pytagorejského presvedčenia o tom, že všetko na svete sa dá vyjadriť podielom dvoch prirodzených čísel. Dôkaz pritom nie je náročný. Opäť použijeme dôkaz sporom:

Vieme, že pre dĺžku uhlopriečky štvorca so stranou dĺžky 1 musí platiť, že jej druhá mocnina je rovná 1 + 1 = 2 (z Pytagorovej vety). Takže, ak sa dĺžka uhlopriečky dá vyjadriť zlomkom v základnom tvare $\frac{a}{b}$, tak

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Kde a a b sú dve rôzne nesúdeliteľné prirodzené čísla. (Nesúdeliteľné znamená, že nemajú žiadneho spoločného deliteľa okrem jednotky.)

Trochu sa pohráme s úpravou rovnice:

$$2b^2 = a^2$$

A teraz dôležité úvahy: Ak máme na ľavej strane párne číslo, napravo musí byť tiež. A druhá mocnina nepárneho čísla nemôže byť párna, pretože $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$. Takže aj číslo a musí byť párne. Môžeme ho teda napísať aj v tvare $a = 2k$. Potom

$$2b^2 = (2k)^2$$

$$2b^2 = 4k^2$$

$$b^2 = 2k^2$$

A sme tam, kde sme boli s číslom *a*. Rovnako by aj *b* muselo byť párne, čo je ale nezmysel, pretože zlomok bol v základnom tvare. (Každý zlomok sa dá upraviť na základný tvar.)

Rovnako sa dá dokázať, že aj iné odmocniny z prirodzených čísel sú iracionálne. (Samozrejme, okrem tých, ktoré nie 😊. Tie sa nazývajú štvorcové čísla, pretože sú druhou mocninou iného prirodzeného čísla.)

V desatinnom tvare je číslo $\sqrt{2}$ približne rovné 1,414213…

Číslo π

Pôvod čísla π je geometrický. Je to pomer medzi priemerom kruhu a jeho obvodom. Grécke písmeno pí je zvolené preto, že je to prvé písmeno slova perimeter, čo je obvod (Fialová, 2020).

Číslo π sa nazýva aj **Ludolfovo číslo,** a to po Ludolfovi van Ceulenovi (čítame *fan Kélen*), ktorý strávil všetok voľný čas po väčšinu svojho života počítaním presnej hodnoty čísla π. Práca, v ktorej uviedol hodnotu π na 35 desatinných miest vyšla až po jeho smrti v roku 1615 (Mareš, 2008, s. 188).

Dnes vypočítavajú hodnotu π počítače, ktoré už presiahli presnosť 10 biliónov desatinných miest. Pre zaujímavosť, už 39 desatinných miest by bohato stačilo na výpočet obvodu celého známeho vesmíru s odchýlkou, ktorá by bola menšia ako priemer atómu vodíka.

- Na zapamätanie cifier čísla π slúži napríklad táto známa pomôcka. Každé slovo znamená také číslo, koľko písmen obsahuje. *„Daj, ó Bože, ó mocný, zapamätať si takýto čísel rad, veľký vznešený Archimedes, pomáhaj trápenému!“* T. j. *3,14 159 265 358 979* (Jackson, 2013, s. 24).

Zlatý rez

Zlatý rez je ďalšie z iracionálnych čísel, ktoré pochádza z geometrie. Úloha sa objavuje už v Euklidových Základoch (nachádza sa v druhej knihe Euklidových Základov, konkrétne pod číslom 11): *„Danú priamku rozdeľte tak, že pravouholník zovretý celou priamkou a jedným z úsekov sa rovná štvorcu na zostávajúcom úseku“* (Čižmár, 2022). (Prepis do dnešného jazyka by hovoril, že $(a + b) \cdot b = a^2$, kde *a* je dlhší a *b* kratší z úsekov.)

Označuje sa gréckym písmenom φ a má hodnotu $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Je to pomer dvoch dĺžok, pre ktoré platí, že pomer dlhšej ku kratšej je ten istý ako pomer ich súčtu k dlhšej. Matematicky: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$, ak *a* je tá dlhšia úsečka. Zlatým rezom

sa označuje preto, že ak chcel maliar rozdeliť plátno v nejakom ľúbeznom pomere, použil zlatý rez a výsledok vyzeral esteticky príťažlivo.

Hodnota zlatého rezu je približne 1,61803… Často sa používa aj hodnota $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ktorá je rovná približne 0,61803…, čo je pomer menšej časti k väčšej. Líšia sa iba o jednotku, cifry za desatinnou čiarkou sú všetky rovnaké.

Zlatý rez sa ale nevyskytuje iba v geometrii. Existuje postupnosť, ktorá na prvý pohľad nemá so zlatým rezom nič spoločné.

Fibonacci (vlastným menom Leonardo z Pisy) túto postupnosť opísal v roku 1202 vo svojej knihe Liber Abaci, kde ju použil ako riešenie jednej z úloh typu: „Koľko párov králikov vznikne každý mesiac, ak sa každý pár od druhého mesiaca rozmnožuje?“

Fibonacciho postupnosť je postupnosť prirodzených čísel, kde každý prvok je súčtom dvoch predchádzajúcich. Začína dvoma jednotkami. Prvých niekoľko prvkov je:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, …

Kde je tu zlatý rez? Pozrime sa na pomery susedných členov a ich približné hodnoty zaokrúhlené na šesť desatinných miest. Zlatý rez zaokrúhlený na šesť desatinných miest je 1,618034:

3 / 2	1,500000
5 / 3	1,666667
8 / 5	1,600000
13 / 8	1,625000
21 / 13	1,615385
34 / 21	1,619048
55 / 34	1,617647
89 / 55	1,618182
144 / 89	1,617978
233 / 144	1,618056
377 / 233	1,618026
610 / 377	1,618037
987 / 610	1,618033

Tabuľka 1. Zlatý rez z členov Fibonacciho postupnosti

Vidíme, že pomery susedných členov Fibonacciho postupnosti sa blížia k hodnote zlatého rezu. To je celkom prekvapivá, ale aj užitočná vlastnosť.

Čísla Fibonacciho postupnosti môžeme použiť aj ako celočíselné dĺžky, ktoré chceme mať približne v pomere zlatého rezu.

Eulerovo číslo

Eulerovo číslo **e** je pomenované podľa Leonharda Eulera, ale Jacob Bernoulli počítal jeho hodnotu už niekoľko desaťročí skôr ako limitu postupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Tento výraz popisuje rast vkladu pri 100 % ročnom úroku, pričom *n* označuje počet delení základného časového intervalu – jedného roku. Čiže ak *n* = 2, tak sa každého polroka pripíše polovica ročného úroku z aktuálneho stavu, na konci roka sa pripíše zasa polovica ročného úroku z už zvýšeného stavu. Čím častejšie úročenie, tým vyšší zisk. Tento rast je ale obmedzený, nerastie do nekonečna, ale blíži sa k hodnote, ktorá je približne 2,71828… Takže pri 100 % ročnom úroku by sme pri úročení, ktoré by prebiehalo stále, povedzme, každú sekundu, dostali po roku približne 2,71828-násobok vkladu. Takéto úročenie sa nazýva spojité úročenie.

Pozrime sa na prvých niekoľko hodnôt:

Význam *n*	***N***	**Približná hodnota**
Počet úročení za polrok	2	2,250000
Počet mesiacov v roku	12	2,613035
Počet dní v roku	365	2,714567
Počet hodín v roku	8 760	2,718127
Počet minút v roku	525 600	2,718279
Počet sekúnd v roku	31 536 000	2,7182818

Tabuľka 2. Eulerovo číslo pri úročení

Pri ročnom úroku *u* výsledná suma na účte pri spojitom úročení počas celého roka bude e^u-násobkom vkladu.

✐ *Vypočítajte, koľko eur by sme mali na účte, ak sme vložili 1000 eur a ponúkli nám ročný úrok 2 % so spojitým úročením.*

Výsledná suma bude $e^{0,02} = 1{,}0202$ násobok vkladu, takže 1020,02 eura. Oproti bežnému ročnému pripisovaniu úroku je to o 2 centy viac.

Toto nie je jediné využitie Eulerovho čísla. Eulerovo číslo má mnoho zaujímavých vlastností, ktoré súvisia s logaritmami, derivovaním a integrovaním – oblasťami matematiky, ktoré prekračujú rámec tejto učebnice.

Čo si zapamätať?

- Množina reálnych čísel zahŕňa všetky prirodzené, celé aj racionálne čísla, ale pridáva aj iracionálne čísla, ktoré sa nedajú zapísať ako pomer dvoch celých čísel.
- Počet reálnych čísel je väčší ako počet prirodzených alebo racionálnych čísel. Je to tzv. väčšie nekonečno.
- Iracionálne čísla majú nekonečný neperiodický desatinný rozvoj, napríklad odmocnina z dvoch (približne 1,4142…) alebo číslo π (približne 3,14159…).
- Najznámejšie reálne čísla majú vlastné označenia a špeciálne vlastnosti (napr. zlatý rez, Eulerovo číslo e).
- Fibonacciho postupnosť súvisí so zlatým rezom – pomer susedných členov sa približuje k hodnote zlatého rezu (približne 1,618).

Úlohy

1) Vymenujte všetky štvorcové čísla menšie ako 300.
2) Je číslo 3,14 racionálne?
3) Ak napíšem číslo, ktoré obsahuje milión náhodne vybraných číslic, bude to číslo racionálne alebo iracionálne?
4) Napíšte také racionálne číslo, ktoré sa nelíši od zlatého rezu o viac ako tisícinu.
5) Je množina reálnych čísel uzavretá vzhľadom na operáciu odmocnina?
6) Ktorá podmnožina reálnych čísel je uzavretá vzhľadom na operáciu odmocnina?
7) Obsahuje prvých 200 miliónov cifier čísla π reťazec 12345? (Existuje stránka https://www.angio.net/pi/, na ktorej môžeme zadať akýkoľvek reťazec čísel a stránka nám ukáže, na ktorom mieste v desatinnom rozvoji čísla π sa tento reťazec nachádza a aj koľkokrát sa tam nachádza – pozná prvých 200 miliónov cifier.)
8) Predstavme si, že by sme mali jeden milión eur. Banka A nám ponúka ročný úrok 4,1 % ale pripisuje úroky iba raz ročne. Banka B 4 % ročný úrok pri spojitom úrokovaní. V ktorej banke by sme dostali viac a o koľko?
9) Chceme nakresliť zlatý obdĺžnik – obdĺžnik, ktorého strany sú v pomere zlatého rezu. Dlhšia strana má mať 15 cm. Koľko cm má mať kratšia strana?
10) Stolár má 1000 milimetrov dlhú pracovnú dosku, do ktorej chce vyvŕtať dieru tak, aby delila dosku na dve časti v pomere zlatého rezu. Kde ju má vyvŕtať? Merať vie s presnosťou na celé milimetre.
11) Ktoré z nasledujúcich čísel patria do množiny reálnych čísel? $-\sqrt[3]{4}$; 9,5; $3\pi - 1$; 0; $\frac{e}{5}$; $\sqrt{-9}$
12) Vytvorím číslo tak, že zapíšem za seba všetky členy Fibonacciho postupnosti: 1,1235813213455… Je toto číslo racionálne?

Riešenia

1) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289.
2) Áno, číslo 3,14 je 314/100 a nie je to číslo π.
3) Racionálne, pretože má konečný počet číslic.
4) Napríklad 1,618.
5) Nie, pretože odmocnina zo záporného čísla nie je reálne číslo.
6) $\mathbb{R}_0^+$ – všetky kladné reálne čísla aj s nulou.
7) Áno, 2018-krát a prvý výskyt je na pozícii 49702 za desatinnou čiarkou.
8) V banke A by sme po roku mali 1 041 000 eur. V banke B 1 040 810,77 eur. Banka A by nám dala viac o 189,23 eura.
9) Asi 9,27 cm.
10) 618 mm od jedného z koncov dosky.
11) Všetky okrem posledného.
12) Nie.

VI. Sčítanie a odčítanie

Sčítanie a odčítanie patria k základným operáciám, s ktorými sa žiaci stretávajú hneď na začiatku školskej dochádzky. V tejto kapitole sa pozrieme na tieto operácie z viacerých uhlov pohľadu – od ich formálneho zavedenia v rôznych číselných množinách až po algoritmy ich výpočtu. Zameriame sa na rôzne spôsoby písomného aj pamäťového počítania a tiež na didaktické súvislosti – ako operácie zavádzať, ako pomáhať žiakom porozumieť ich významu a ako rozvíjať ich zručnosti. Nezabudneme ani na úskalia, ktoré sa pri výučbe týchto operácií môžu objaviť.

Pozrime sa najprv na všeobecnú definíciu binárnej operácie – operácie, ktorá prebieha na dvojici prvkov nejakej číselnej množiny. Okrem binárnych operácií sa v školskej matematike môžeme stretnúť aj s unárnymi operáciami – takými, ktoré potrebujú iba jeden vstupný prvok, napr.: absolútna hodnota čísla, druhá mocnina, druhá odmocnina na množine kladných reálnych čísel atď.

Binárna operácia

Binárna operácia $\circ$ na množine M je zobrazenie, ktoré každej usporiadanej dvojici prvkov množiny M priradí práve jeden prvok, ktorý patrí tiež do množiny M. (Presnú definíciu nájdeme napr. v publikácii Híca a Pokorného, 2010.) Najjednoduchším príkladom je sčítanie na množine prirodzených čísel. Vyberieme akúkoľvek dvojicu prirodzených čísel, výsledok sčítania bude opäť prirodzené číslo. Operácia odčítania ale nie je binárnou operáciou na množine $\mathbb{N}$, pretože dvojici [1, 2] nepriradí výsledok z množiny prirodzených čísel. Odčítanie je binárnou operáciou na množine celých čísel.

Komutatívnosť – hovoríme, že binárna operácia $\circ$ na množine M je komutatívna, ak $\forall\, x, y \in M$ platí, že $x \circ y = y \circ x$. To znamená, že nezáleží na poradí operandov, výsledok bude rovnaký.

Asociatívnosť – hovoríme, že binárna operácia $\circ$ na množine M je asociatívna, ak $\forall\, x, y, z \in M$ platí, že $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

Operácia sčítania je komutatívna aj asociatívna, operácia odčítania ani jedno ani druhé.

Neutrálny prvok – ak existuje taký prvok $e \in M$, o ktorom platí $\forall\, a \in M$: $a \circ e = e \circ a = a$, tak prvok e nazývame neutrálnym prvkom operácie $\circ$. Neutrálny

prvok je teda prvok, ktorý neovplyvňuje výsledok operácie. Pre sčítanie je to nula, odčítanie neutrálny prvok nemá, pretože síce $5 - 0 = 5$ ale $0 - 5 = -5$.

Inverzný prvok – nech e je neutrálny prvok operácie $\circ$. Ak o prvkoch $a, b \in M$ platí, že $a \circ b = b \circ a = e$, tak prvok b nazývame inverzným prvkom k prvku a vzhľadom na operáciu $\circ$. Inverzné prvky hľadáme iba k operáciám, ktoré majú neutrálny prvok, takže odčítanie nemá inverzné prvky. Pri sčítaní na množine prirodzených čísel inverzné prvky nie sú. Sčítanie na množine celých čísel už inverzné prvky obsahuje. Napríklad, pre číslo 2 je inverzným prvkom -2, pretože $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$.

Inverzná operácia – ak pre dve binárne operácie $\circ$ a $*$ na množine M platí, že $a \circ b = c \Leftrightarrow c * b = a$, pre každú dvojicu prvkov a, b množiny M, tak operácie $\circ$ a $*$ nazývame opačnými binárnymi operáciami. Inverznými operáciami sú sčítanie a odčítanie ($5 + 7 = 12 \Leftrightarrow 12 - 7 = 5$) alebo násobenie a delenie na množine, ktorá neobsahuje nulu ($3 \cdot 6 = 18 \Leftrightarrow 18 / 6 = 3$).

Vlastnosti operácií sčítanie a odčítanie

Sčítanie a odčítanie sú základné aritmetické operácie, ktoré môžeme definovať na množine prirodzených čísel. Operandy a výsledky týchto dvoch operácií nazývame nasledovne:

sčítanec + sčítanec = súčet,

menšenec – menšiteľ = rozdiel.

Operácia sčítania je dobre definovanou operáciou na množine prirodzených čísel (pozri kapitolu *Prirodzené čísla*). Je komutatívna, asociatívna, má neutrálny prvok na $\mathbb{N}_0$, nie na $\mathbb{N}$. Inverzné prvky nemá.

Vzhľadom na operáciu odčítania nie je množina prirodzených čísel uzavretá – výsledok nemusí patriť do množiny, preto odčítanie nie je binárnou operáciou na množine prirodzených čísel. Tento problém býva v školskej matematike riešený rôznymi spôsobmi:

Buď sa vytvárajú také úlohy, ktorých výsledok nebude záporný (ochudobňujeme sa o možnosť, aby aj žiaci sebe vytvárali úlohy), alebo sa žiakom povie dodatočné pravidlo, že odčítavať môžeme len menšie číslo od väčšieho. Toto pravidlo musíme nutne zrušiť po zavedení záporných čísel. Navyše môže vzniknúť problém so zapisovaním: žiak môže zapísať $3 - 5 = 2$, čo je v súlade s jeho predstavou rozdielu, ale matematicky nesprávne.

Poďme si rozobrať tieto riešenia:

1. Odčítanie zavedené štandardne na množine celých čísel – žiaci pracujú iba s kladnými číslami, ak narazia na záporný výsledok, učiteľ im predstaví aj záporné čísla ako platné. Toto je matematicky korektný spôsob, proti ktorému nemožno nič namietať. Predpokladá sa ale, že sa žiakom už na prvom stupni predstavia aj čísla záporné. Odčítanie nie je komutatívne, asociatívne a nemá ani neutrálny prvok.
2. Odčítanie definované inak (v nesúlade s matematicky korektnou definíciou) – ako rozdiel početnosti dvoch množín – ide o binárnu operáciu na množine prirodzených čísel. Táto operácia je na rozdiel od korektného odčítania komutatívna – nezáleží na poradí operandov, nie je asociatívna, pretože napr.: $3 - (2 - 1)$ nie je to isté ako $(3 - 2) - 1$, má neutrálny prvok – nulu a každý prvok je sám sebe inverzným prvkom. Vidíme, že rozdiely oproti bežnej operácii odčítania sú značné.

Sčítanie

Operáciu sčítania v školskej praxi zavádzame na dvoch hlavných modeloch – ako pridávanie prvkov v množstevných modeloch a ako posun vpred na adresno-operátorových modeloch prirodzených čísel. Predpokladom k sčítaniu je dôkladné poznanie číselnej množiny, na ktorej sa bude operácia vykonávať. Kým dieťa nevie napočítať do deväť, nemôže zvládnuť sčítať čísla 5 + 4. Ak dieťa nemá predstavu, čo je to polovica a štvrtina, nemôže vedieť, čo bude ich súčtom.

Sčítanie dvoch čísel menších ako desať zvládajú niektoré deti už v predškolskom veku. Najlepšou pomôckou sú im vlastné prsty. Ak je výsledok väčší ako desať, pomáhajú si rôznymi spôsobmi. Vždy ale počítajú postupne, využívajúc pritom číselný rad. Aj v úlohách, kde sčítanie vystupuje ako pridávanie, nakoniec spočítavajú výsledný počet po jednej.

Na základnej škole je najlepšou pomôckou práve číselný rad, ktorý by mali mať deti stále k dispozícii až dovtedy, kým sa im všetky možné výsledky sčítania jednociferných čísel neuložia do pamäti tak, že už bude číselný rad nepotrebný. Tieto príklady, kde sčítance sú čísla do desať, sa nazývajú **základné spoje sčítania.** Základných spojov sčítania je 121, pretože oba sčítance môžu byť čísla: 0, 1, 2, …, 10. Deti by sa ich ale nemali učiť spamäti. Do pamäti sa im majú uložiť vďaka mnohonásobnému opakovaniu procesu, pri ktorom si výsledok sami vypočítajú buď na prstoch, alebo pomocou číselného radu.

Ak deti dobre ovládajú základné spoje sčítania a je im dobre známy koncept desiatkovej číselnej sústavy, možno prejsť k sčítaniu viacciferných čísel.

V obore do 100 si žiaci postupne osvojujú rôzne druhy sčítania. Najskôr ide o jednoduché prípady v obore do 10, keď sčítavajú dve jednociferné čísla bez prechodu cez základ desať (napr. 5 + 4). Potom nasleduje pripočítanie jednociferného čísla k desiatke (10 + 5) a k dvojcifernému číslu v obore do 20 (15 + 4). Až potom prichádzajú na rad príklady s prechodom cez základ desať, napríklad 9 + 5. Postupne sa žiaci učia aj sčítanie celých desiatok (50 + 30), pripočítanie jednociferného čísla k celej desiatke (30 + 5) a k dvojcifernému číslu bez prechodu cez základ desať (32 + 5). Nasledujú úlohy, kde sčítajú dve dvojciferné čísla bez prechodu (23 + 41), príklady s pripočítaním jednociferného čísla s prechodom (37 + 8) a napokon aj sčítanie dvoch dvojciferných čísel s prechodom cez základ desať (37 + 28). Tento typ úloh možno riešiť rôznymi spôsobmi. Napríklad rozkladom druhého sčítanca tak, aby doplnil desiatku v prvom (27 + 15 = 27 + 3 + 12 = 30 + 12 = 42), alebo osobitným sčítaním desiatok a jednotiek (20 + 10 = 30, 7 + 5 = 12, teda 30 + 12 = 42). Metód pamäťového sčítania existuje viacero a je prirodzené, že rôzni žiaci používajú v jednotlivých príkladoch rozličné postupy.

Priebežne vykonávame **tréning odhadu** výsledku pomocou zaokrúhľovania: 48 + 153 = cca 50 + 150 = cca 200. Môžeme tento postup využiť pri počítaní spamäti: 200 − 2 + 3 = 201 presne. Deti si sami možno vytvoria rôzne iné postupy, ako sčítať viacciferné čísla spamäti.

1. **Sčítanie od najvyššieho rádu po najnižší:** 156 + 245 = 100 + 200 = 300, 50 + 40 = 90, 5 + 6 = 11. Medzivýsledky spočítame: 300 + 90 + 11 = 390 + 11 = 401. Tento postup má jednu výhodu – už prvý medzivýsledok nám dáva celkom dobrý odhad výsledku. Keď sme spočítali stovky, vieme hneď, že výsledok bude aspoň tristo, po sčítaní desiatok vidíme, že výsledok bude aspoň 390. S každým rádom sa náš odhad spresňuje, až kým neprídeme k správnemu výsledku.
2. **Algoritmus sčítania pod sebou,** pri ktorom postupujeme opačne – od jednotiek po vyššie a vyššie rády. Ak v niektorom kroku vyjde číslo väčšie ako 9, je potrebné urobiť rozklad na tvar 10 + x, zapísať len x a jednotku pridať o rád vyššie.

	$^{+1}$	5^{+1}	7
+		5	8
	1	1	5

Obrázok 16. Sčítanie s prechodom cez desiatku

Algoritmus sčítania pod sebou je náročný na pamäť – dieťa potrebuje urobiť súčasne niekoľko matematických operácií: sčítanie, rozklad na tvar 10 + x,

pamätanie si jednotky a pripočítanie tejto jednotky k výsledku sčítania vo vyššom ráde. Navyše často nie je zápis úhľadný, zamieňajú sa pozície a z toho vznikajú chyby. Preto najskôr dávame deťom úlohy s predznačenými stĺpikmi. Začínať treba s takými, kde v žiadnom kroku nevyjde číslo väčšie ako 9, neskôr také, kde vyjde takýto výsledok len na jednom mieste, až na koniec dávať úlohy, kde je potrebné pridať aj pozíciu navyše. Na obrázku 16 vidíme zápis riešenia súčtu 57 + 58 = 115.

Kontrola správnosti

Vo všeobecnosti sa kontrola správnosti vykonáva pomocou inverznej operácie. Sčítanie kontrolujeme odčítaním, odčítanie sčítaním. Robiť skúšku správnosti sčítania pomocou operácie odčítania však neodporúčame, pretože pri odčítaní je vyššia pravdepodobnosť chybovosti ako v pôvodnom sčítaní. Namiesto toho sčítanie kontrolujeme hneď v úvode tak, že urobíme **odhad.** Tým predídeme chybám v posune pozície (čísla sa nezapísali pod sebou správne). Ak výsledok vyšiel v súlade s úvodným odhadom, môžeme správnosť výpočtu overiť tak, že využijeme vlastnosť **komutatívnosti** a vypočítame príklad ešte raz s vymeneným poradím sčítancov: 124 + 168 = 292, kontrola 168 + 124 = 292.

Odčítanie

Dieťa sa s operáciou odčítania zoznamuje už v prvých rokoch školskej dochádzky. Postupne rieši rôznorodé konkrétne úlohy na odčítanie spôsobom: škrtanie obrázkov – odčítanie ako **odoberanie,** dokresľovanie do požadovaného počtu – odčítanie ako **dopočítavanie** (3 a koľko je 5?), spájanie dvojíc z dvoch skupín a spočítanie tých, ktoré zostali – odčítanie ako **rozdiel početnosti.** Na adresno-operátorových modeloch zasa vníma odčítanie ako **výsledok pohybu vzad.** Postupne objavuje, že odčítanie je operácia opačná k sčítaniu a vie základné spoje sčítania použiť aj na odvodenie základných spojov odčítania.

Poďme sa pozrieť podrobnejšie na algoritmus odčítania pod sebou. Základným predpokladom je správne si čísla zapísať pod seba – jednotky pod jednotky, desiatky pod desiatky atď. Skôr než pristúpime k samotnému odčítaniu, musíme si preveriť, či menšenec je skutočne väčší ako menšiteľ. V opačnom prípade algoritmus nebude fungovať.

Podobne ako pri sčítaní, postupujeme sprava doľava. V najjednoduchších príkladoch vieme v každom ráde (stĺpci) bez problémov odčítať – číslica hore je väčšia alebo rovná ako číslica pod ňou. Problém nastáva, ak máme hore číslicu menšiu. V tom prípade musíme rozmeniť desiatku z vyššieho rádu. Na

obrázku 17 vidíme príklad, v ktorom vezmeme jednu desiatku z pôvodných 7 a pridáme desať k pôvodne iba 3 jednotkám. Na mieste jednotiek potom máme 13 a od tých vieme odčítať 8, na mieste desiatok už máme len 6, od tých stále vieme odčítať 5 a pokračujeme až k stovkám.

	2	7^{-1}	3
−	1	5	8
	1	1	5

Obrázok 17. Odčítanie s prechodom cez desiatku, príklad 1

Náročnejší prípad nastane, ak rozmieňanie prebieha vo viacerých rádoch alebo dokonca ani nemáme čo rozmieňať vo vyššom ráde. V tomto príklade sme sa snažili rozmeniť jednu desiatku, ale žiadne desiatky sme nemali. Zapísali sme −1 k desiatkam, vypočítali 13 − 8 = 5. Vidíme, že z desiatok nič odoberať nejde, preto musíme rozmeniť jednu stovku – zapíšme −1 k stovkám a pozeráme, že by sme mali mať 10 desiatok, ale jednu sme už použili pri odčítaní jednotiek (máme zapísanú −1), takže desiatok je 9 a od nich už môžeme odčítať 5.

	2^{-1}	0^{-1}	3
−	1	5	8
	0	4	5

Obrázok 18. Odčítanie s prechodom cez desiatku, príklad 2

Často sa v pedagogickej praxi stretávame s mierne odlišným postupom – rozmenená desiatka z predchádzajúceho rádu sa neodčítava, ale učiteľ hovorí, že si požičiava jednotku z predchádzajúceho rádu a potom ju vracia tak, že ju pripočíta k číslici menšiteľa.

Tento spôsob vedie k rovnakým výsledkom, ale z nášho pohľadu je to ťažšie odôvodniteľné. Predchádzajúci postup totiž priamo vyplýva z princípu, na ktorom stojí zapisovanie čísel v pozičnej desiatkovej sústave. V tomto druhom pohľade tiež z neho vychádzame, ale ešte pridáme úvahu, že keď máme odčítať od čísla o jednotku zmenšeného, je to to isté, ako odčítať o jednotku väčšie číslo.

	2	0	3
−	1^{+1}	5^{+1}	8
	0	4	5

Obrázok 19. Odčítanie s prechodom cez desiatku, tradičný spôsob

Kontrola správnosti

Odčítanie je operácia náročnejšia ako sčítanie, preto výpočet vždy skontrolujeme **pomocou sčítania.** T. j. rozdiel + menšiteľ = menšenec: 203 − 158 = 45, kontrola: 45 + 158 = 203.

Pre odčítanie platí aj vzťah menšenec − rozdiel = menšiteľ, čo sa tiež niekedy môže zísť.

Sčítanie a odčítanie na množine $\mathbb{Z}$

Na množine všetkých celých čísel je vhodné zaviesť operácie sčítania a odčítania na adresno-operátorových modeloch alebo opozitných modeloch, o ktorých sme písali podrobnejšie v kapitole *Celé čísla.* Ak chceme využiť konkrétne algoritmy, ktoré už poznáme z množiny prirodzených čísel, musíme najskôr rozlíšiť niekoľko prípadov:

Sčítanie dvoch kladných čísel – algoritmus totožný s algoritmom platným pre sčítanie prirodzených čísel.

Sčítanie dvoch záporných čísel – totožný algoritmus, no výsledok je záporný. Toto je úplne pochopiteľné v opozitnom množstevnom modeli – pridávanie modrých guľôčok k modrým dá väčšie množstvo modrých guľôčok. Zapíšeme: −3 + (−5) počítame ako 3 + 5 = 8, ale výsledok má byť so znamienkom −, takže výsledok je −8.

Sčítanie kladného a záporného čísla – pri počítaní s malými číslami na číselnej osi zistíme, že musíme použiť algoritmus na odčítanie. Musíme zistiť rozdiel absolútnych hodnôt sčítancov a znamienko výsledku bude závisieť od toho, aké znamienko mal sčítanec s väčšou absolútnou hodnotou. Takže napr. 4 + (−7) počítame ako 7 − 4 = 3. Väčšie bolo číslo 7, ktoré malo znamienko −, takže aj výsledok bude −3.

Odčítanie dvoch kladných čísel – prebieha rovnako ako odčítanie prirodzených čísel s tým, že ak je menšiteľ väčší ako menšenec, výsledok bude mať

znamienko mínus. 3 − 8 počítame 8 − 3 = 5 a k výsledku pridáme znamienko mínus −5.

Odčítanie dvoch záporných čísel – absolútne hodnoty čísel odčítame, výsledné znamienko musíme vyhodnotiť podľa konkrétnych hodnôt. Napr.: −2 − (−9) = 7, −9 − (−2) = −7.

Odčítanie kladného a záporného čísla – používame algoritmy pre sčítanie a znamienko výsledku závisí od toho, aké znamienko má menšenec. Napríklad 5 − (−3) = 8, −3 − 5 = −8.

Všetky tieto pravidlá by mali deti objaviť sami tým, že veľakrát počítajú s malými číslami na konkrétnych modeloch.

Sčítanie a odčítanie na množine $\mathbb{Q}$

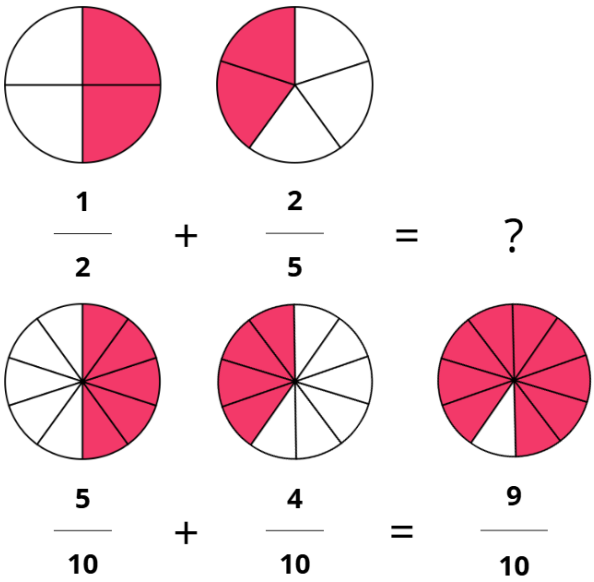
Spôsob, akým sčítame alebo odčítame racionálne čísla, závisí od toho, v akom tvare sú tieto čísla zapísané a v akom tvare chceme získať výsledok. Najjednoduchšie sa počíta s číslami v tvare desatinného čísla, pretože takéto čísla sčítavame rovnako ako celé – algoritmy sčítania a odčítania pod sebou s tým, že musíme dávať dobrý pozor na to, aby sme mali správne zapísané operandy – aby jednotky boli nad jednotkami, desatiny nad desatinami atď. Užitočnou značkou je práve desatinná čiarka – podľa nej môžeme čísla bezpečne zarovnať. Úplne iný prípad nastáva, ak počítame s číslami v tvare zlomkov.

Sčítanie a odčítanie zlomkov

Rozlišujeme dva prípady: ak majú zlomky toho istého menovateľa – vtedy sčítame alebo odčítame čitatele tak, ako celé čísla a výsledok bude mať toho istého menovateľa. Zlomky s rovnakým menovateľom môžeme považovať za jednotky toho istého typu a s tými vieme počítať tak, ako s celými číslami.

Druhý prípad je náročnejší. Sčítať alebo odčítať zlomky s rôznymi menovateľmi nemôžeme. Jediná možnosť je upraviť ich tak, aby mali rovnaké menovatele. To sa dá vďaka rozširovaniu zlomkov. V nasledujúcom príklade na obrázku 20 vidíme, ako sa zlomok 1/2 upravil na zlomok 5/10, ktorý je tým istým racionálnym číslom (rovnaká vyfarbená časť). Zlomok 2/5 sme podobne upravili na zlomok 4/10. Tieto zlomky už sčítať môžeme.

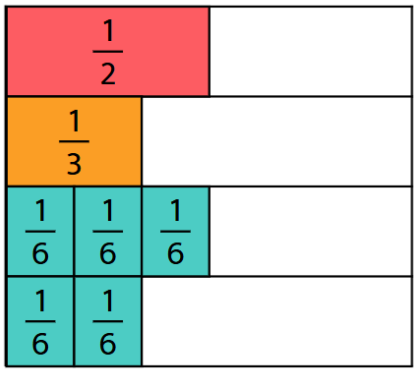
Nájsť takého menovateľa, na ktorého vieme upraviť oba zlomky nie je veľmi náročné. Matematicky ide o postup nájdenia najmenšieho spoločného násobku menovateľov pôvodných zlomkov. Ak sme sčítali čísla s menovateľmi 2 a 5, najmenší spoločný menovateľ je 10. Preto sme oba zlomky rozširovaním upravili na zlomky s menovateľom 10.



Obrázok 20. Sčítanie zlomkov

V školskej praxi je najdôležitejšie používať rôzne názorné modely zlomkov a len na nich ukazovať, ako sčítať a odčítať. Najčastejšie problémy žiakov so zlomkami nastávajú preto, že žiakom chýba konkrétna predstava, nerozumejú postupu, ktorý používajú, a preto robia rôznorodé chyby.

Na webe možno nájsť viacero stránok, na ktorých možno krásne znázorňovať zlomky s rôznymi malými menovateľmi. Množstvo námetov dobre využiteľných v praxi vytvorených pomocou Geogebry nájdeme na stránke https://www.geogebra.org/m/K7cDMUC7.



Obrázok 21. Odčítanie zlomkov

Ďalším príkladom je stránka https://toytheater.com/, na ktorej je vytvorený nasledujúci príklad výpočtu rozdielu 1/2 – 1/3. Opäť sme zlomky upravili na zlomky so spoločným menovateľom 3/6 – 2/6, ktoré môžeme odčítať a tak vidíme, že výsledok je 1/6.

V školskej praxi sa často stretávame s rôznymi návodmi, ako možno sčítať a odčítať zlomky jednoduchšie – krížové pravidlo a podobne. Tieto návody

možno urýchľujú samotný výpočet, ale nevedú k hlbšiemu porozumeniu. My preto odporúčame používať spôsob, ktorý vychádza z predchádzajúcich úvah.

Čo si zapamätať?

- Sčítanie a odčítanie sú navzájom inverzné operácie.
- Sčítanie je komutatívne aj asociatívne, odčítanie nie. Sčítanie má neutrálny prvok 0 a v množine celých čísel aj inverzné prvky – opačné čísla.
- V prirodzených číslach platí: výsledok sčítania je vždy prirodzené číslo, výsledok odčítania je prirodzené číslo len vtedy, ak menšie číslo odčítavame od väčšieho.
- V celých a racionálnych číslach môžeme bez obmedzenia sčítať a odčítať akékoľvek čísla.
- Písomné algoritmy sú nástrojom na spoľahlivý výpočet, no ich pochopenie je dôležitejšie než bezchybná rutina.
- Na sčítanie a odčítanie desatinných čísel používame tie isté algoritmy ako pre celé čísla.
- Sčítanie a odčítanie zlomkov je možné až vtedy, keď zlomky upravíme na spoločného menovateľa pomocou rozširovania.
- Sčítanie a odčítanie zlomkov znázorňujeme na rozličných modeloch – kruhových, obdĺžnikových, úsečkových.

Úlohy

1) Aké vlastnosti má operácia odčítanie na množine všetkých reálnych čísel?
2) Aké vlastnosti má operácia sčítanie na množine všetkých reálnych čísel?
3) Čo znamená, že operácie sčítanie a odčítanie sú navzájom opačné operácie? Ako to využívame pri kontrole správnosti?
4) Určte, čomu sa rovnajú neznáme čísla *a* a *b:*

		5	*b*
+		*a*	8
	1	3	7

5) Vypočítajte −6,371 + 40,51 pomocou algoritmu sčítania alebo odčítania pod sebou.
6) Vypočítajte $\frac{5}{6} - \frac{3}{10}$.
7) Zmiešané číslo je číslo tvaru $2\frac{1}{3}$, čo čítame ako 2 celé a jedna tretina. Zmiešané číslo upravujeme na klasický tvar zlomku tak, že celú časť vynásobíme číslom v menovateli a pripočítame číslo čitateľa. Teda $2 \cdot 3 + 1$ bude v čitateli a 3 v menovateli. Ukážte, že zmiešané číslo nie je nič iné ako obyčajný súčet celého čísla a zlomku.
8) Vypočítajte $2{,}8 + \frac{3}{4} + 0{,}2 + \frac{5}{4}$ čo najjednoduchšie. Ktorú vlastnosť operácie sčítania pri tom využijete?
9) Opačné číslo je číslo, ktoré má opačné znamienko, čiže ku kladnému číslu je opačné číslo záporné, k zápornému kladné. Je pravda, keď sa hovorí, že odčítať číslo je to isté ako pripočítať opačné číslo? Ukážte na príkladoch.
10) Doplňte čísla tak, aby rovnosti platili. Potom vysvetlite, ako ste postupovali.

    a) ___ + 3,5 = 7,2
    b) $\frac{5}{6}$ − ___ = $\frac{1}{2}$
    c) ___ − (−2,3) = 4

Riešenia

1) Nie je komutatívna, asociatívna, nemá neutrálny prvok ani inverzné prvky.

2) Je komutatívna, asociatívna, má neutrálny prvok 0 a každý prvok má aj inverzný prvok – opačné číslo.

3) To znamená, že ak $a - b = c$, tak $c + b = a$. Takto vieme overiť, že výsledok odčítania sme vypočítali správne.

4) $b = 9$, $a = 7$.

5) Čísla musíme odčítať:

	4^{-1}	0	5^{-1}	1^{-1}	0
−		6	3	7	1
	3	4	1	3	9

6) Menovatele 6 a 10 majú najmenší spoločný násobok 30, takže $\frac{5}{6} - \frac{3}{10} = \frac{25}{30} - \frac{9}{30} = \frac{16}{30}$, čo vieme skrátiť na $\frac{8}{15}$.

7) Chceme dokázať, že $2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$. Celé číslo vieme previesť na tvar zlomku tak, že mu napíšeme jednotku v menovateli: $2 + \frac{1}{3} = \frac{2}{1} + \frac{1}{3}$, spoločný násobok menovateľov 1 a 3 je 3, takže druhý zlomok rozširovať netreba, iba rozšírime ten prvý trojkou: $\frac{2\cdot 3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2\cdot 3+1}{3}$, čo je presne ten istý postup ako pri premene zmiešaného čísla na tvar zlomku.

8) Komutatívnosť na zmenu poradia $2{,}8 + 0{,}2 + \frac{3}{4} + \frac{5}{4}$ a asociatívnosť na zoskupenie do dvojíc $(2{,}8 + 0{,}2) + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right) = 3 + 2 = 5$.

9) Áno, pretože sčítanie a odčítanie sú opačné operácie. Príklady: $5 - 3 = 5 + (-3) = 2$ alebo, ak odčítame záporné číslo: $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$.

10) a) $7{,}2 - 3{,}5 = 3{,}7$ pomocou opačnej operácie
b) $\frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ využitím toho, že menšenec − rozdiel = menšiteľ.
c) $4 - 2{,}3 = 1{,}7$ úpravou na pripočítanie kladného čísla a potom opačnou operáciou.

VII. Násobenie a delenie

V tejto kapitole sa pozrieme na dve základné aritmetické operácie – násobenie a delenie – nielen z pohľadu ich vlastností na rôznych množinách čísel, ale aj z pohľadu ich didaktického zavádzania v školskej matematike. Ukážeme si rôzne algoritmy výpočtu, vrátane menej tradičných, a vysvetlíme, aké princípy stoja za ich fungovaním. Nezabudneme ani na význam presného zápisu, možnosti kontroly výsledku a súvislosti medzi operáciami.

Základné pojmy a notácie

Násobenie a delenie sú ďalšie zo základných aritmetických operácií, ktoré sú navzájom opačné na množine racionálnych (aj reálnych) čísel. Tieto binárne operácie sa zapisujú pomocou rôznych znakov v závislosti od veku žiakov, typu textu a kontextu. V tejto učebnici používame jednotnú, odbornú notáciu, ktorá zodpovedá medzinárodným štandardom.

- **Násobenie** zapisujeme znakom „ · “ (napr. 3 · 43), prípadne bez znaku pri písmenách (napr. *ab*). V školskom prostredí anglosaských krajín sa používa aj znak „×“, ktorý je vizuálne výraznejší, no v odbornej matematike a pri práci s premennými sa neodporúča.
- **Delenie** zapisujeme znakom „/“ (napr. 12 / 5). Tradičný školský zápis „:“ (napr. 12 : 3 = 4) v tejto učebnici nepoužívame, keďže môže viesť k zámenám s pojmom pomer. V anglosaských krajinách sa v školskom prostredí možno stretnúť aj so znakom „÷“.

Pomenovanie operandov a výsledkov operácií násobenia a delenia v slovenčine:

Činiteľ · činiteľ = súčin

Delenec / deliteľ = podiel.

Násobenie

Vzhľadom na operáciu násobenia je množina prirodzených čísel uzavretá (výsledok je vždy prirodzené číslo). Táto operácia má svoj **neutrálny prvok 1, agresívny prvok 0** (všetko sa násobením s nulou vynuluje). Platí **komutatívny** (2 · 3 = 3 · 2) aj **asociatívny** zákon (2 · 3) · 4 = 2 · (3 · 4). V množinách racionálnych

a reálnych čísel má každý prvok okrem nuly aj svoj **inverzný prvok.** (K číslu 2 je inverzný prvok 1/2, pretože ich súčin je rovný 1.)

Spolu s operáciou sčítania platí **distributívny zákon** (roznásobovanie). Napr. $2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ aj $(3 + 4) \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2$. Toto je dôležitá vlastnosť, na ktorej sú postavené rôzne algoritmy násobenia.

Postupnosť zavádzania v školskej matematike

Prvýkrát sa žiaci stretávajú s násobením v zmysle opakovaného pripočítavania toho istého čísla v prvých rokoch základnej školy. Tieto úlohy spočiatku riešia obrázkom, dokresľovaním predmetov, postupným sčítaním. Treba poznamenať, že komutatívnosť násobenia nie je zrejmá hneď, pretože napríklad $4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5$, ale $5 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$. Štyri päťky a päť štvoriek je odlišný kontext, ale vedie k rovnakému výsledku. Toto by mali deti objaviť riešením podobných dvojíc úloh.

Následne sa oboznamujú s **malou násobilkou** – tabuľkou, ktorú majú žiaci k dispozícii, vytvárajú ju, pracujú s ňou, dopĺňajú chýbajúce čísla, hrajú rôzne didaktické hry na vyhľadávanie násobkov niektorého jednociferného čísla. Aj tu by sa mali žiaci presvedčiť o tom, že násobenie je komutatívne – tabuľka je symetrická.

- **Násobenie na prstoch:** Čísla z poslednej štvrtiny malej násobilky si môžeme ľahko vynásobiť na prstoch. Ide o príklady, v ktorých sú oba činitele väčšie alebo rovné 5 a menšie alebo rovné 10. Postup si ukážeme na príklade: $7 \cdot 9$. Na jednej ruke vystrieme 2 prsty ($5 + 2 = 7$), na druhej 4 prsty ($5 + 4 = 9$) – vystreté prsty spočítame a výsledok vynásobíme desiatkou $2 + 4 = 6$, takže 60. Zohnuté prsty 3 a 1 vynásobíme a pripočítame k predchádzajúcemu číslu $3 \cdot 1 = 3$. Výsledok je $60 + 3 = 63$. Skutočnosť, že násobenie na prstoch tak, ako sme ho tu popísali vždy vedie k správnemu výsledku môžeme dokázať prepísaním do matematického jazyka: $(5 + a) \cdot (5 + b) = (a + b) \cdot 10$ (vystreté prsty) $+ (5 - a) \cdot (5 - b)$ (skrčené prsty). Po jednoduchých úpravách zistíme, že rovnosť platí pre ľubovoľné a a b.

Po malej násobilke nasleduje násobenie mocninami desiatky – násobenie číslami 10, 100, 1000, … Žiaci by mali mať možnosť sami objaviť princíp – stačí pripísať požadovaný počet núl. Môžu na to prísť tak, že postupne počítajú napríklad $4 \cdot 10 = 10 + 10 + 10 + 10 = 40$, $4 \cdot 100 = 100 + 100 + 100 + 100 = 400$…

Potom možno počítať aj príklady typu $3 \cdot 400$ pomocou asociatívnosti:

$3 \cdot 400 = 3 \cdot (4 \cdot 100) = (3 \cdot 4) \cdot 100 = 12 \cdot 100 = 1200$.

Algoritmy násobenia viacciferných čísel

Algoritmy násobenia, s ktorými sa možno v školách najčastejšie stretnúť, sú založené na tom istom princípe – oba činitele rozložíme na súčet násobkov mocnín desiatky (145 = 100 + 40 + 5) a potom vynásobíme každý sčítanec prvého činiteľa s každým sčítancom druhého činiteľa.

Napríklad 145 · 286 = (100 + 40 + 5) · (200 + 80 + 6) =

100 · 200 + 100 · 80 + 100 · 6 + 40 · 200 + 40 · 80 + 40 · 6 + 5 · 200 + 5 · 80 + 5 · 6 = 20000 + 8000 + 600 + 8000 + 3200 + 240 + 1000 + 400 + 30 = 41470.

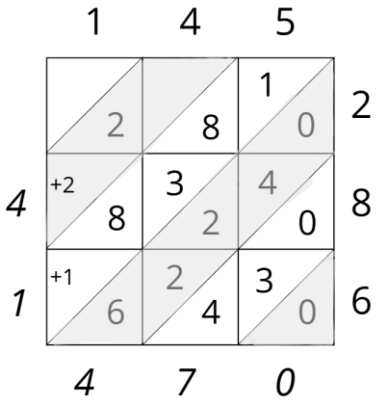
Jednotlivé sčítance sa počítajú ľahko – ak máme v dispozícii malú násobilku a vieme násobiť mocninami desiatky – teda vieme, že stačí k výsledku pripísať toľko núl, koľko mali činitele. Takto však násobenie nezapisujeme, pretože je mnoho miest, kde možno spraviť numerickú chybu a tá sa ťažko dohľadáva a opravuje. Preto existujú prehľadnejšie zápisy – indické násobenie a násobenie pod sebou.

Indické násobenie

Indické násobenie je metóda násobenia, ktorá je použiteľná na akékoľvek veľké čísla. Základom je desiatkový zápis čísla a násobenie každej cifry prvého činiteľa s každou cifrou druhého činiteľa. Medzivýsledky sú zapisované do úhľadnej tabuľky, ktorá zabezpečí správne umiestnenie v desiatkovom zápise výsledku úlohy.

Čísla, ktoré násobíme zapisujeme hore a vpravo, tabuľka má toľko riadkov a stĺpcov, koľko cifier majú činitele. Každé pole tabuľky je uhlopriečkou rozdelené na ľavú hornú časť a pravú dolnú časť. Do políčka tabuľky zapisujeme výsledok násobenia cifier činiteľov v príslušnom riadku a stĺpci tak, že jednociferný výsledok píšeme vpravo dole, dvojciferný tak, že desiatky vľavo hore a jednotky vpravo dole. (Pozri nasledujúci obrázok 22.)

Medzivýsledky v jednotlivých poliach tabuľky sa sčítavajú tak, ako je znázornené na obrázku 22 – v šikmých líniách. Sčítanie ale prebieha rovnakým postupom, akoby boli čísla zapísané pod sebou. Ak na niektorej pozícii vyjde viacciferné číslo, zapíšeme len počet jednotiek. Počet desiatok posunieme o pozíciu vyššie.



Obrázok 22. Indické násobenie

Tento algoritmus násobenia je náročnejší na čas v prípade, že nemáme predpripravené tabuľky. Jeho najväčšou výhodou je prehľadnosť – veľmi rýchlo vieme nájsť chybu, ak sa žiak pomýlil v nejakom kroku, pretože všetky medzivýsledky sú v tabuľke zapísané.

Algoritmus násobenia pod sebou

Tento algoritmus je založený na princípe rozkladu jedného z činiteľov do desiatkového zápisu:

145

· 286

870 ..... čo je vlastne 6 · 145

11600 ..... čo je vlastne 80 · 145

29000 ..... čo je vlastne 200 · 145

41470

Medzivýsledky takisto počítame pomocou desiatkového rozkladu: 6 · 145 = 6 · (100 + 40 + 5) počítame odzadu: 6 krát 5 je 30, 0 napíšeme, 3 musíme presunúť o rád vyššie, 6 krát 4 je 24, 24 + 3 je 27, 7 napíšeme, 2 sa presúva, 6 krát 1 je 6, 6 + 2 = 8. V ďalšom riadku začíname sprava jednou nulou, pretože ideme násobiť číslom 80, aj keď hovoríme, že násobíme len osmičkou. V treťom riadku musíme hneď zapísať až dve nuly sprava, pretože budeme násobiť číslom 200, ale hovoríme, že násobíme dvojkou.

Tento algoritmus sa v školskej praxi vyskytuje najčastejšie. Nespornou výhodou je jeho rýchlosť, alš čo sa týka práce s chybou, nie je algoritmus násobenia pod sebou najlepší. Pri aplikácii tohto algoritmu môže dochádzať k numerickým chybám častejšie a sú aj ťažšie dohľadateľné – jeden zlý medzivýsledok malej násobilky a už treba prepočítať všetko odznova.

Egyptské násobenie a delenie

Na úplne inom princípe je postavené egyptské násobenie. Egypťania nepoznali desiatkovú pozičnú číselnú sústavu, takže ani nemohli využiť desiatkový rozvoj činiteľov. Namiesto toho násobili metódou zdvojnásobovania. Princíp je založený na opakovanom zdvojnásobovaní jedného z činiteľov, až pokiaľ nezískame želaný násobok.

145 · 286 =

145	1
290	2
580	4
1160	8
2320	16
4640	32
9280	64
18560	128
37120	256

Ďalej netreba. Vľavo vidíme čísla, ktoré vznikajú postupne riadok po riadku tak, že sa zdvojnásobuje predchádzajúce číslo. Vpravo vidíme, koľkonásobok pôvodného činiteľa na príslušnom riadku máme. Z čísel vpravo potrebujeme vyskladať druhého činiteľa. V tomto prípade 286 = 256 + 16 + 8 + 4 + 2. Tieto riadky označíme a čísla vľavo na označených riadkoch spočítame.

Takže 145 · 286 = 290 + 580 + 1160 + 2320 + 37120 = 41470.

Princíp, prečo to funguje spočíva v rozklade druhého činiteľa do dvojkovej číselnej sústavy

286 = 1 · 256 + 0 · 128 + 0 · 64 + 0 · 32 + 1 · 16 + 1 · 8 + 1 · 4 + 1 · 2 + 0 =

256 + 16 + 8 + 4 + 2 a teda

145 · 286 = 145 · (256 + 16 + 8 + 4 + 2) = 145 · 256 + 145 · 16 + 145 · 8 + 145 · 4 + 145 · 2, čo sú presne hodnoty na označených riadkoch.

Podobným spôsobom sme aj delili – v tomto prípade zdvojnásobovali deliteľa. Príklad nájdete nižšie v podkapitole o delení.

Kontrola správnosti

Kontrola správnosti násobenia sa vykonáva využitím **komutatívnosti** tejto operácie – činitele vynásobíme vo vymenenom poradí. Prípadne využijeme **rôzne algoritmy** – násobenie pod sebou a egyptské násobenie. Teoreticky by bolo možné overovať správnosť výsledku násobenia aj pomocou opačnej operácie – delenia. Toto ale neprináša príliš dobré výsledky, keďže delenie je náročnejšia operácia a teda je väčšia šanca spraviť chybu pri kontrole správnosti ako pri samotnom počítaní.

Delenie

Delenie je operácia opačná k násobeniu. Nie je to operácia na množine prirodzených ani celých čísel. Na množine racionálnych čísel bez nuly už áno, preto môžeme odvodzovať aj jej vlastnosti. Delenie nie je komutatívne ani asociatívne. Nemá neutrálny prvok, takže ani inverzné prvky. Pre operácie delenia a sčítania platí **distributívny zákon jediným smerom:**

$(a + b) / c = a / c + b / c$, kde a, b, c sú ľubovoľné reálne čísla, c je nenulové.

Takže keď delíme 15 cukríkov medzi 5 detí, môžeme rozdeliť najprv 10 cukríkov a potom rozdeliť aj zvyšných 5. Na tejto vlastnosti sú založené algoritmy delenia.

Ďalšou zaujímavou vlastnosťou je **možnosť násobiť delenca aj deliteľa tým istým číslom** bez zmeny podielu:

$x / y = zx / zy$, pre ľubovoľné nenulové reálne čísla x, y, z.

Slovné zdôvodnenie na konkrétnom príklade by mohlo vyzerať takto: delíme 10 cukríkov medzi 5 detí. Ak budeme mať dvakrát toľko cukríkov, ale aj dvakrát toľko detí, koľko dostane jedno dieťa?

Delenie na množine prirodzených (aj celých) čísel má ten istý problém ako odčítanie: množina nie je vzhľadom na túto operáciu uzavretá. To znamená, že výsledkom delenia dvoch prirodzených (celých) čísel nemusí byť prirodzené (celé) číslo. Problém býva v školskej matematike riešený najčastejšie dvoma možnými spôsobmi:

Používame len príklady, ktorých výsledky sú prirodzené (celé) čísla. Vtedy musíme dbať na to, aby delenec bol násobkom deliteľa. Niekedy sa toto delenie označuje ako **delenie bezo zvyšku.** Alebo zavedieme postup, ktorý nemožno nazvať binárnou operáciou – **delenie so zvyškom.**

Delenie so zvyškom

Výsledkom delenia potom nie je jedno číslo, ale dvojica **neúplný podiel** a **zvyšok.** Matematicky korektne môžeme takýto postup prepísať takto:

$$20 / 8 = 2\ zv.\ 4 \Leftrightarrow 20 / 8 = 2 + \frac{4}{8}$$

To znamená, že zvyšok v žiadnom prípade nemôžeme chápať ako samostatné prirodzené číslo. Hodnota zvyšku je úzko spätá s deliteľom. S tým súvisia niektoré zaujímavé problémové úlohy, ktoré môžeme žiakom zadávať.

✐ *Objasni paradox: 19 / 9 = 2 zv. 1, ale aj 5 / 2 = 2 zv. 1. Potom by malo platiť, že 19 / 9 = 5 / 2, takže 19 · 2 = 5 · 9, ale 38 sa nerovná 45. Prečo?*

Odpoveď spočíva v tom, že aj keď neúplný podiel 2 je v oboch prípadoch naozaj ten istý, zvyšok 1 je v prvom prípade jednou devätinou a v druhom prípade jednou polovicou. Pri tomto zdôvodnení sme ale použili racionálne čísla, ktoré nie sú súčasťou množiny celých čísel, v ktorej sme sa snažili delenie vykonávať. Preto je delenie so zvyškom problematické. Naozaj nemôžeme tvrdiť ani to, že výsledkom delenia je dvojica prirodzených čísel. Výsledkom delenia je v skutočnosti až trojica prirodzených čísel – neúplný podiel, zvyšok a deliteľ. Z dvoch čísel sme dostali tri…

V odbornej matematike zapisujeme delenie so zvyškom pomocou násobenia:

20 = 2 · 8 + 4.

V teórii čísel je celá oblasť zameraná na počítanie so zvyškami v množine celých čísel. Volá sa **modulárna aritmetika** a z delenia 20 / 8 sa stáva zápis $20 \equiv 4\ (mod\ 8)$. Čítame 20 je kongruentné s číslom 4 modulo 8, čo znamená – 20 dáva rovnaký zvyšok ako 4 po delení ôsmimi. Modulárna aritmetika sa používa všade tam, kde sa čísla cyklicky opakujú – hodiny, dni v týždni, atď.

✐ *Šesť detí Anička, Betka, Cyril, Dávid, Eva a Filip sa striedajú pri vykonávaní služby v triede. Prvý deň je na rade Anička, druhý Betka, …, šiesty Filip, siedmy opäť Anička atď. Kto bude na rade na tridsiaty piaty deň?*

Nezaujíma nás, koľko kôl prejde, iba zvyšok $35 \equiv 5\ (mod\ 6)$. Preto bude na rade Eva.

Delenie so zvyškom na kalkulačke: Ak chceme deliť so zvyškom na kalkulačke, musíme postupovať nasledovne: Vydelíme štandardne 35 / 6. Vyjde 5,833333…, takže neúplný podiel je 5, zapíšeme na papier a na kalkulačke od výsledku odpočítame túto päťku, čím dostaneme iba zvyšok v tvare desatinného čísla 0,833333… Toto číslo stačí vynásobiť deliteľom

a máme zvyšok. 0,833333… · 6 = 5 alebo 4,9999998 podľa toho, ako kalkulačka zaokrúhľovala. Výsledok je každopádne 35 / 6 = 5 zv. 5

Kritériá deliteľnosti

Delenie bezo zvyšku tiež nie je operáciou na množine celých čísel, aj keď v tomto prípade dostávame jednoznačný výsledok. Dôvodom je to, že podiel bude patriť do množiny celých čísel iba pre niektoré dvojice delenec – deliteľ. V školskej praxi delíme najčastejšie malými prirodzenými číslami. Delence bývajú rôzne čísla a ak chceme pohotovo tvoriť úlohy na delenie bezo zvyšku, musíme ovládať základné kritériá deliteľnosti – pravidlá, podľa ktorých dokážeme rýchlo rozhodnúť, či dané číslo bude deliteľné konkrétnym malým deliteľom alebo nie. Všetky kritériá sú úzko späté so zápisom čísla v desiatkovej pozičnej číselnej sústave.

Kritériá deliteľnosti číslami 2, 5 a 10

Číslo je deliteľné 2, 5 alebo 10, ak je týmto číslom deliteľná posledná cifra.

Dôkaz vyplýva z desiatkového rozkladu čísla, napr.: $130 = 1 \cdot \underline{100} + 3 \cdot \underline{10} + 0$. Všetky čísla 10, 100, 1000, … sú deliteľné číslami 2, 5 aj 10, takže aj ich násobky budú deliteľné 2, 5 aj 10. Preto stačí overiť len poslednú cifru.

Kritérium deliteľnosti číslom 4

Číslo je deliteľné 4, ak posledné dvojčíslie je deliteľné 4. Dôkaz je podobný ako v predchádzajúcom prípade – čísla 100, 1000, … sú deliteľné 4, preto stačí overiť posledné dvojčíslie. Napr.: $2552 = 2 \cdot \underline{1000} + 5 \cdot \underline{100} + 52$.

Kritériá deliteľnosti číslami 3 a 9

Ak je číslom 3 alebo 9 deliteľný ciferný súčet, tak aj celé číslo.

Dôkaz vyplýva z desiatkového zápisu čísla: napr. $273 = 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3 = (2 \cdot \underline{99} + 2) + (7 \cdot \underline{9} + 7) + 3$. Čísla 9, 99 a ich násobky sú deliteľné číslami 3 a 9, iba 2 + 7 + 3 zostáva otázne a to je presne ciferný súčet.

Kritérium deliteľnosti číslom 11

Číslo je deliteľné 11, ak je jedenástkou deliteľný tzv. *striedavý ciferný súčet* tohto čísla. Striedavý ciferný súčet obsahuje striedavo znamienka + a − začínajúc znamienkom + sprava (na mieste jednotiek). Ak chceme zistiť, či je číslo 2354 deliteľné 11, musíme určiť striedavý ciferný súčet: $-2 + 3 - 5 + 4 = 0$, takže toto číslo je deliteľné 11.

Dôkaz je komplikovanejší. Vychádza zo skutočnosti, že čísla 99, 9999, 999 999, … sú deliteľné 11 a takisto čísla 11, 1 001, 100 001, … Takže číslo 2354 zapíšeme ako $2 \cdot (\underline{1001} - 1) + 3 \cdot (\underline{99} + 1) + 5 \cdot (\underline{11} - 1) + 4$.

Kritériá deliteľnosti číslami 6 a 12

Čísla 6 a 12 sú zložené čísla, v ktorých prvočíselnom rozklade sa nachádzajú dve rôzne prvočísla: $6 = 2 \cdot 3$ a $12 = 2^2 \cdot 3$. Preto musia súčasne platiť dve kritériá deliteľnosti. Pre šestku je to kritérium deliteľnosti dvojkou a zároveň trojkou a pre 12 je to kritérium deliteľnosti číslom 4 a zároveň číslom 3.

Číslo 4326 je deliteľné 6, pretože posledná cifra je deliteľná dvojkou a ciferný súčet trojkou. Toto číslo ale nie je deliteľné 12, pretože nie je deliteľné číslom 4 – posledné dvojčíslie nie je násobkom 4.

Všetky **kritériá deliteľnosti zároveň urýchľujú aj výpočet zvyšku po delení** daným číslom. Neurčujú iba, či je číslo deliteľné, ale aj aký zvyšok po delení daným číslom dostaneme. Napríklad ciferný súčet čísla má rovnaký zvyšok po delení deviatimi ako pôvodné číslo. Toto využívame napríklad pri deviatkovej skúške. (Podrobnejšie v rovnomennej podkapitole.)

Postupnosť zavádzania v školskej matematike

Spočiatku sa delenie ilustruje na konkrétnych úlohách typu:

1. **Delenie na rovnako veľké časti:** „Máme 12 cukríkov a chceme ich pobaliť po štyroch. Koľko balíčkov cukríkov urobíme?“ Toto deti riešia tak, že opakovane odčítajú $12 - 4 = 8$, $8 - 4 = 4$, $4 - 4 = 0$. Koľkokrát sme odčítali, kým sme sa dostali k nule? Trikrát.
2. **Delenie na určitý počet častí:** „Máme 12 cukríkov a chceme ich spravodlivo rozdeliť štyrom deťom. Koľko cukríkov dostane každé dieťa?“ Toto je kontextovo úplne iná situácia, aj keď matematický príklad je to ten istý. Dieťa rieši úlohu podobne – každému dieťaťu dá jeden cukrík $12 - 4 = 8$, potom ešte jeden $8 - 4 = 4$ a ešte jeden $4 - 4 = 0$. Rozdalo všetko, nič nezostalo.
3. **Delenie ako opačná operácia k násobeniu:** „štyri krát koľko je dvanásť?“ Vtedy dieťa postupne pripočítava, až príde k dvanástke. Počas počítania si na prstoch alebo písomne zaznamenáva, koľkokrát pridávalo. Oba predchádzajúce prípady sa dajú ľahko previesť na tento.

Vidíme, že postup prepísaný do matematického jazyka je v prvých dvoch prípadoch rovnaký. Predstava a proces v reálnom kontexte je ale rozdielny. Je potrebné, aby žiaci získali dostatočné množstvo skúseností so všetkými spôsobmi, aby sami mohli prísť k záveru, že matematicky sú totožné a možno ich zamieňať.

Po oboznámení sa s malou násobilkou sa deti naučia používať ju aj na delenie tak, že v príslušnom riadku zodpovedajúcom násobkom deliteľa hľadajú

najbližšie číslo menšie ako delenec. V stĺpci prečítajú neúplný podiel a dopočítajú zvyšok.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Obrázok 23. Malá násobilka – delenie číslom 7

Na obrázku 23 ilustrujeme hľadanie podielu 39 / 7 v tabuľke tak, že pozeráme na riadok s násobkami sedmičky. Najbližší menší násobok od čísla 39 je 35 – to je v stĺpci s číslom 5. Do 39 ešte chýba pripočítať 4, takže 39 / 7 = 5 zv. 4.

Následne môžu žiaci začať deliť viacciferné číslo jednociferným číslom pomocou rozkladu delenca. 85 / 5 = (50 + 35) / 5 = 10 + 7. Využívame tu jednosmerný distributívny zákon. Jednosmerný, pretože platí iba tak, že rozložíme delenca, deliteľa v žiadnom prípade nerozkladáme na súčet.

Algoritmus delenia

Algoritmus, ktorý používame pri delení celých čísel so zvyškom, je založený na rozklade delenca na čísla deliteľné deliteľom bezo zvyšku (až pokiaľ sa dá), napr.: 639 / 3 = (600 + 30 + 9) / 3 = 200 + 10 + 3 = 213, čo vieme využiť aj v príkladoch náročnejších.

486 / 3 = (300 + 180 + 6) / 3 = 100 + 60 + 2 = 162, čo vieme zapísať aj takto:

486 / 3 = 162 zv. 0

18

06

0

Pri tomto zápise pokračujeme zľava doprava tak, že najskôr vydelíme 4 / 3, do výsledku napíšeme neúplný podiel a zvyšok 1 napíšeme do druhého riadku pod číslo 4, k tomuto zvyšku dopíšeme počet desiatok a číslo, ktoré dostaneme

delíme, neúplný podiel zapíšeme do výsledku, zvyšok znova dole do ďalšieho riadku. Takto pokračujeme až kým nevydelíme aj jednotky.

Príklad delenia so zvyškom zapísaný aj ako rozklad aj ako štandardný algoritmus delenia:

773 / 6 = (600 + 120 + 53) / 6 = 100 + 20 + 8 zv. 5

773 / 6 = 128 zv. 5

17

53

5

Egyptské delenie

Egyptské delenie je algoritmus delenia ako operácie opačnej k egyptskému násobeniu. Pri delení zdvojnásobujeme deliteľa tak dlho, až kým neprídeme dostatočne blízko k delencovi. V nasledujúcom príklade delenie chápeme ako hľadanie odpovede na otázku: Koľkokrát musíme násobiť číslo 145, aby sme dostali číslo 44200?

44200 / 145 = (256 + 32 + 16) zv. 120 = 304 zv. 120

145	1
290	2
580	4
1160	8
2320	16
4640	32
9280	64
18560	128
37120	256

Delenca následne musíme vyskladať z čísel vľavo. Vždy hľadáme najbližšie menšie číslo: 44200 − 37120 = 7080, 7080 − 4640 = 2440, 2440 − 2320 = 120. To bude zvyšok. Neúplný podiel je súčet čísel v označených riadkoch vpravo.

Delenec je teda o 120 väčší ako 256-násobok + 32-násobok + 16-násobok čísla 145.

Kontrola správnosti

Kontrola správnosti delenia sa vždy robí pomocou opačnej operácie – násobením. V prípade delenia so zvyškom vynásobíme neúplný podiel deliteľom a k výsledku pripočítame zvyšok. Takto musí vyjsť číslo rovné delencovi. Ak sme počítali 773 / 6 = 128 zv. 5, kontrola správnosti bude: 128 · 6 = 768, 768 + 5 = 773.

Násobenie a delenie na množine $\mathbb{Z}$

Na odvodenie pravidiel pre násobenie a delenie kladných a záporných čísel potrebujeme najprv zistiť, ako sa násobí číslom −1. Vieme, že napríklad 4 · (−1) = (−1) + (−1) + (−1) + (−1) = −4. Pre komutatívnosť násobenia bude aj (−1) · 4 = −4. Toto je užitočné zistenie. Záporné čísla vieme teda zapisovať ako jeho absolútnu hodnotu násobenú číslom −1.

Príklady typu (−5) · (−8) vieme upraviť vďaka komutatívnosti a asociatívnosti na (−1) · 8 · (−1) · 5 = (−1) · (−1) · (8 · 5). Ostáva len zistiť, čomu sa rovná súčin (−1) · (−1). Do úvahy prichádzajú iba dve možnosti – buď je to jeden, alebo mínus jeden. Mohol by byť výsledok −1? Ak by to tak bolo, tak by platilo, že (−1) · (−1) = 1 · (−1), ale jedennásobok aj mínus jeden násobok toho istého čísla nemôže byť to isté číslo. Súčin (−1) · (−1) teda musí byť kladný.

Tieto úvahy sa väčšinou zhrnú do postupu – násobíme absolútne hodnoty činiteľov a následne určíme znamienko výsledku podľa týchto pravidiel:

+ · + = +, + · − = −, − · + = −, − · − = +.

Takéto isté pravidlá platia aj pre delenie. Odvodiť to vieme vďaka tomu, že delenie je opačná operácia k násobeniu. Napr. z + · − = − vyplýva − / − = +.

Násobenie a delenie na množine $\mathbb{Q}$

Pri odvodzovaní algoritmov pre násobenie a delenie racionálnych čísel postupujeme tak, že najskôr násobíme a delíme desatinné čísla mocninami desiatky – aj mocninami menšími ako 1. Poznatky, ku ktorým by mali žiaci dospieť možno zhrnúť do nasledujúcich štyroch bodov:

1. Násobenie číslami 10, 100, 1000, … desatinné číslo sa zväčšuje – desatinná čiarka sa posúva smerom doprava.
2. Násobenie číslami 0,1; 0,01; 0,001; … desatinné číslo sa zmenšuje – desatinná čiarka sa posúva smerom doľava.

3. Delenie číslami 10, 100, 1000, … je to isté ako násobenie číslami 0,1; 0,01; 0,001; …
4. Delenie číslami 0,1; 0,01; 0,001; … je to isté ako násobenie číslami 10, 100, 1000, …

Násobenie desatinných čísel potom môže prebehnúť rovnakým algoritmom (ľubovoľným zo spomínaných) ako násobenie prirodzených čísel s jedným krokom navyše. Výsledný súčin bude mať toľko desatinných miest, koľko mali spolu oba činitele. Prečo to funguje ukážeme na príklade:

$12{,}3 \cdot 0{,}52 = (123 \cdot 0{,}1) \cdot (52 \cdot 0{,}01) = (123 \cdot 52) \cdot (0{,}1 \cdot 0{,}01) = 6396 \cdot 0{,}001 = 6{,}396.$

Využili sme vlastnosti komutatívnosti a asociatívnosti násobenia.

Na **delenie desatinných čísel celým číslom** sa používa algoritmus podobný tomu, ktorý už poznáme. Vtedy delíme postupne zľava doprava. Keď narazíme na desatinnú čiarku, zapíšeme ju do podielu a pokračujeme ďalej.

64,71 / 3 = 21,57

```
04,
 17
  21
   0
```

Delenie desatinného čísla teda nekončí vydelením jednotiek, ale pokračuje až kým nebude zvyšok nulový alebo kým neobjavíme **periódu** – čísla sa začnú opakovať. Pri delení jednocifernými deliteľmi môžu mať výsledky periódu jednocifernú (keď delíme trojkou, šestkou alebo deviatkou) alebo šesťcifernú ak delíme sedmičkou. Po delení číslami 2, 4, 5, 8 nevznikne periodické číslo. Ak je deliteľ väčšie číslo, môžu vzniknúť aj dlhšie periódy. Pri takýchto príkladoch je užitočné vopred sa dohodnúť, ako presný chceme mať výsledok. Napríklad, ak stačí podiel s presnosťou na dve desatinné miesta, stačí deliť po tretie desatinné miesto, aby sme vedeli výsledok zaokrúhliť na dve desatinné miesta.

Delenie desatinným číslom si vyžaduje jednu operáciu hneď na začiatku: deliteľa musíme upraviť tak, aby nebol desatinným, ale celým číslom. To spravíme tak, že ho vynásobíme mocninou desiatky podľa toho, koľko mal desatinných miest – ak dve, násobíme stovkou, ak tri, tisíckou atď. Tou istou mocninou desiatky musíme vynásobiť aj delenca. Prakticky to vykonávame ako posun desatinnej čiarky doprava o toľko isto desatinných miest v delencovi aj deliteľovi. Tým dostaneme ekvivalentnú úlohu, ktorej výsledok bude totožný s výsledkom pôvodnej úlohy.

Napríklad 45,81 / 0,4 = 458,1 / 4 = 114,525

05

18,

21

10

20

0

Použili sme teda vlastnosť, o ktorej sme písali vyššie – násobenie delenca aj deliteľa tým istým číslom nezmení výsledok delenia.

Násobenie a delenie zlomkov

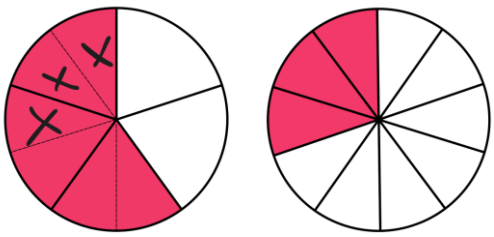
Ak chceme odvodiť pravidlo, ako násobiť zlomky, musíme začať s úlohami, kde násobíme zlomok celým číslom, pretože to môžeme spraviť opakovaným sčítaním:

$$5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{3} = \frac{10}{3}$$

Násobenie je komutatívna operácia na množine racionálnych čísel, a to musí platiť bez ohľadu na to, v akom tvare je číslo zapísané, takže aj pre čísla v tvare zlomkov. Takže aj $\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3}$.

Ukázali sme teda, že súčin zlomku a celého čísla vieme vypočítať tak, že čitateľa vynásobíme týmto celým číslom a menovateľa opíšeme.

Čo ale znamená dve tretiny krát päť celých? To je presne to isté, ako povedať dve tretiny z päť celých. A skutočne 2/3 z 5 je 10/3. Zväčša **tam, kde je napísané slovko „z", môžeme použiť znamienko násobenia.** Toto zistenie môžeme použiť na odvodenie pravidla pre násobenie všetkých zlomkov. Príklad: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$ je polovica z troch pätín, čo si znázorníme na kruhovom modeli:

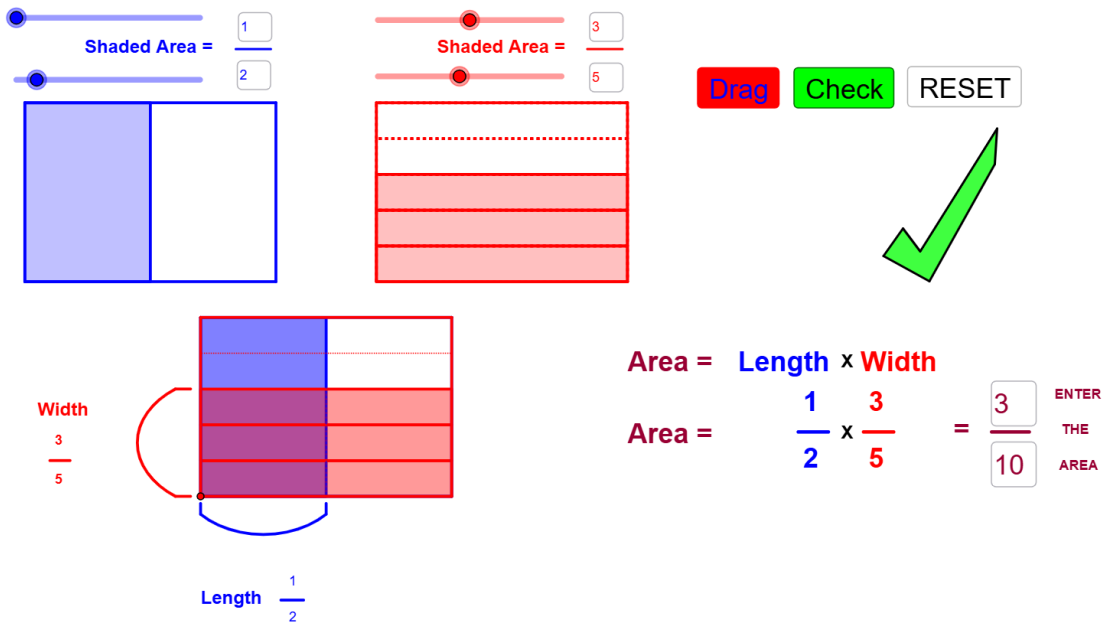


Obrázok 24. Násobenie zlomkov na kruhovom modeli

Vidíme, že $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$, takže v tomto prípade sme násobili menovatele a čitateľ zostal rovnaký. Ak by sme chceli spočítať, koľko je $\frac{7}{2} \cdot \frac{3}{5}$, môžeme použiť vlastnosť asociatívnosti násobenia: $\frac{7}{2} \cdot \frac{3}{5} = \left(7 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{5} = 7 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\right) = 7 \cdot \frac{3}{10} = \frac{21}{10}$,

takže skutočne súčin zlomkov môžeme vypočítať tak, že čitateľom bude súčin čitateľov a menovateľom súčin menovateľov.

Násobenie zlomkov vieme pekne ilustrovať aj pomocou geometrického modelu, kde súčin je obsah obdĺžnika. Napríklad na https://www.geogebra.org/m/A6VfvhnP vieme znázorniť súčin $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$ takto:



Obrázok 25. Násobenie zlomkov ako obsah obdĺžnika

Keď už vieme, ako násobiť zlomky, ľahko odvodíme aj delenie – delenie je opačná operácia k násobeniu. **Deliť číslom je teda to isté ako násobiť inverzným prvkom k tomuto číslu.** A čo sú inverzné prvky vzhľadom na násobenie v množine racionálnych čísel? Neutrálny prvok je jednotka, takže inverzný prvok je taký, ktorého súčin s pôvodným číslom dáva výsledok 1. Napríklad k 2/3 je inverzný prvok 3/2, pretože ich súčin je 6/6 = 1. Zlomok, ktorý má vymeneného čitateľa s menovateľom sa nazýva **prevrátený zlomok.**

Delenie zlomkov sa niekedy zapisuje v tvare **zloženého zlomku.** Tento vieme prepísať na základný tvar práve pomocou operácie delenia, ktorú prevedieme na násobenie prevráteným zlomkom.

Napríklad $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

Delenie zlomkov vieme ilustrovať aj pomocou nasledujúceho spôsobu: napríklad 15 / 3 môžeme znázorniť tak, že máme 15 koláčikov, ktoré tvoria 3 porcie. Otázka je, koľko koláčikov je jedna porcia? V prirodzených číslach je to jasné. 15 / 3 = 5. Päť koláčikov je jedna porcia. Deliť zlomkom je podobné. Napríklad 15 / si predstavíme tak, že máme 15 koláčikov, ktoré tvoria tri pätiny porcie. Otázka je koľko koláčikov je jedna porcia? Keď tri pätiny porcie

sú 15, tak jedna pätina porcie bude 15 / 3 = 5 koláčikov a teda celá porcia 5 · 5 = 25 koláčikov.

Ak sú **racionálne čísla v tvare percent,** najlepšie je prepísať ich na tvar desatinného čísla alebo zlomku a počítať súčin či podiel podľa vyššie uvedených pravidiel. Pre percentá platí to isté, ako pre zlomky v zmysle významu slovka „z“: 20 % z 5,2 prepíšeme ako 0,2 · 5,2 = 1,04. Preto je 40 % z 25 to isté ako 25 % z 40.

Prednosť operácií

V úlohách, v ktorých vystupuje viacero počtových operácií, nepočítame v ľubovoľnom, ale presne určenom poradí. Najvyššiu prioritu majú vždy **zátvorky** – to čo je v zátvorke, počítame prvé.

Ďalšie v poradí je **násobenie a delenie.** Obe tieto operácie sú si navzájom rovnocenné, takže ak je v úlohe viac týchto operácií, postupujeme zľava doprava. Bežné chyby, ktoré sa vyskytujú v tomto prípade spočívajú v tom, že toto pravidlo nedodržujeme a násobíme skôr: príklad 15 / 3 · 5 často navádza k nesprávnemu výsledku 1. Správna odpoveď je 25, pretože najprv delíme trojkou a následne výsledok násobíme päťkou.

Posledné v poradí sú **sčítanie a odčítanie.** Tieto operácie sú opäť rovnocenné, takže počítame zľava doprava. V tomto prípade sa nevyskytujú podobné chyby ako pri násobení a delení. Každú úlohu, ktorá obsahuje sčítanie aj odčítanie, vieme totiž upraviť na taký tvar, ktorý bude obsahovať iba sčítanie, a to už je komutatívne, takže môžeme počítať v akomkoľvek poradí. Využijeme pritom tú vlastnosť, že odčítanie je sčítanie opačného čísla, takže napríklad 2 − 5 + 8 − 10 si môžeme predstaviť aj ako 2 + (−5) + 8 + (−10) a toto môžeme počítať v poradí (2 + 8) + (−5 + (−10)) = 10 − 15 = −5. Dalo by sa povedať, že na poradí nezáleží, len treba mínuská brať s tým číslom, pred ktorým stoja.

Deviatková skúška

Pre operácie sčítanie, odčítanie a násobenie na množine celých čísel existuje zaujímavá možnosť, ako rýchlo overiť správnosť akéhokoľvek výpočtu. Využijeme pritom výsledky modulárnej aritmetiky a počítame iba so zvyškami po delení deviatimi.

✐ *Overte správnosť výpočtu deviatkovou skúškou:*

$$23701 \cdot (803 + 7412) - 5439 = 194698276$$

Zvyšok po delení deviatimi sa zisťuje veľmi ľahko – podľa kritéria deliteľnosti deviatimi je zvyšok čísla taký istý, aký je zvyšok jeho ciferného súčtu a teda aj ciferného súčtu jeho ciferného súčtu. Najrýchlejšie to spočítame tak, že postupne sčítavame cifry a keď prekročíme deviatku, túto deviatku zanedbáme a ideme ďalej. Prvý člen 23701 počítame nasledovne: 2 + 3 = 5, 5 + 7 = 12, to je to isté ako 3, 3 + 1 = 4. Takže zvyšok čísla 23701 po delení deviatimi je 4. Takto zredukujeme všetky členy (803 má zvyšok 2, 7412 zvyšok 5 a 5439 zvyšok 3 po delení deviatimi). Daná úloha sa zredukovala na:

$$4 \cdot (2 + 5) - 3 = 25$$

Zvyšok po delení deviatimi má byť teda 7. Výsledok, ktorý máme overiť, má skutočne zvyšok 7. Deviatková skúška vyšla.

Mohli sme redukovať aj počas tohto výpočtu 4 · 7 = 28 je to isté ako 1 a 1 – 3 = −2. Tu sa ale musíme zamyslieť, čo je to zvyšok −2? Zvyšky po delení deviatimi sa pohybujú v kruhu od nuly do 8, deviatka je znova nulou, desiatka je 10 – 9 = 1, 19 bude mať tiež zvyšok 1. Všetky čísla, ktoré získavame pripočítavaním deviatky, majú ten istý zvyšok. Takže k zápornému číslu tiež stačí pripočítať deviatku, a preto −2 má ten istý zvyšok ako 7.

Takto je možné rýchlo odhaliť možnú chybu, ale nie je isté, že odhalí každú chybu – aj nesprávny výsledok môže mať ten istý zvyšok po delení deviatimi.

Skúška pomocou poslednej cifry – na podobnom princípe je založená aj druhá skúška, ktorá je vlastne desiatkovou skúškou. V tejto zisťujeme zvyšky po delení desiatimi, takže čísla nahradíme iba poslednou cifrou:

$$1 \cdot (3 + 2) - 9 = -4$$

Ak vyjde zvyšok záporný, stačí k nemu pripočítať desiatku. Zvyšok mínus štyri po delení desiatimi je ten istý ako 6. A to je skutočne posledná cifra výsledku. Výpočet sme teda overili dvoma rôznymi skúškami – deviatkovou aj desiatkovou, takže šanca, že je správny, je pomerne vysoká.

Mohli by sme odvodiť aj iné podobné skúšky pomocou zvyškov po delení inými prirodzenými číslami. Každá sa ale dá použiť iba na úlohy v množine celých čísel, ktoré obsahujú iba operácie na množine celých čísel (nie delenie).

Čo si zapamätať?

- Násobenie je opakované sčítanie rovnakých sčítancov, delenie je rozdelenie na rovnaké časti alebo určenie, koľkokrát môžeme dané číslo odčítať alebo koľkokrát sa číslo do druhého zmestí.
- Násobenie a delenie sú navzájom opačné operácie.

- Násobenie je komutatívne a asociatívne, delenie vo všeobecnosti nie.
- Násobenie má v množine racionálnych čísel neutrálny prvok 1 a každý nenulový prvok má inverzný prvok – prevrátený zlomok.
- Spolu s operáciou sčítania platí pre násobenie distributívny zákon oboma smermi, pre delenie iba jedným smerom.
- Pri výučbe násobenia a delenia sa využívajú modely (napr. obrázky, schémy) na podporu porozumenia.
- Existuje viacero algoritmov na písomné násobenie a delenie – tradičné aj alternatívne.
- Násobenie číslom (−1) mení číslo na opačné.
- Pri racionálnych číslach sa pracuje s vlastnosťami desatinných a zlomkových zápisov.
- Didakticky je dôležité, aby žiaci porozumeli výpočtovým algoritmom, nielen ich vedeli mechanicky používať.
- Kritériá deliteľnosti vieme využiť nielen na tvorbu úloh na delenie, ktoré vyjdú bezo zvyšku. Sú aj základom, na ktorom stojí deviatková skúška správnosti.

Úlohy

1) Ak je dnes pondelok, aký deň bude o 200 dní?

2) Skúste vypočítať súčin čísel $154_6 \cdot 432_6$ bez prevodu do desiatkovej číselnej sústavy. Na obrázku máte k dispozícii malú násobilku v šestkovej číselnej sústave.

1	**2**	**3**	**4**	**5**
2	**4**	**10**	**12**	**14**
3	**10**	**13**	**20**	**23**
4	**12**	**20**	**24**	**32**
5	**14**	**23**	**32**	**41**

Obrázok 26. Malá násobilka v šestkovej číselnej sústave

3) Presvedčte sa na konkrétnych príkladoch, že pri delení číslom 6 vznikne vždy číslo s maximálne jednocifernou periódou.

4) Zistite, akú dĺžku periódy bude mať podiel 1 / 13. Skúste nájsť také číslo n, pre ktoré bude mať podiel $1/n$ ešte dlhšiu periódu.

5) Napíšte aspoň dva spôsoby, ako možno vypočítať 20 % z 30.

6) Doplňte chýbajúce cifry tak, aby bolo číslo deliteľné deviatkou: 23_8.

7) Doplňte chýbajúce cifry tak, aby číslo 118_0 bolo deliteľné štvorkou aj trojkou.

8) Deliť racionálne číslo v tvare zlomku znamená násobiť prevráteným zlomkom. Ako to môžeme využiť pri výpočte podielu $\frac{5}{7}$ / 6? Čo je prevráteným zlomkom k celému číslu?

9) Vydeľte so zvyškom pomocou rozkladu delenca aj pomocou algoritmu delenia: 2450 / 8 a urobte aj kontrolu správnosti.

10) Vypočítajte pomocou klasického, indického a egyptského násobenia súčin $16 \cdot 75$. Ktorý spôsob bol najrýchlejší? Prečo?

11) Vypočítajte $3 - (6 + 8 / 4 \cdot 2) / 5 = ?$ Ktorá operácia sa vykoná ako prvá?

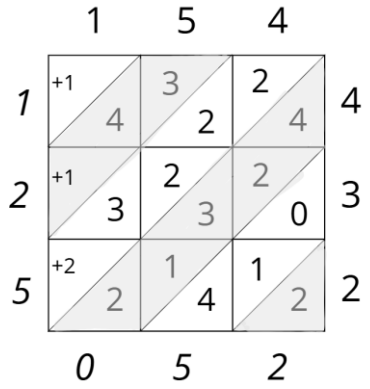
12) Vložte do výrazu zátvorky tak, aby výsledok bol rovný desiatim:

    $2 + 8 / 4 / 2 - 1$

Riešenia

1) Ak je pondelok číslo 1, o dvesto dní bude číslo 201. $201 \equiv 5\ (mod\ 7)$. Bude piatok.

2) Pomocou indického násobenia to bude najjednoduchšie. Pri sčítavaní počítame vždy do šesť – celá šestka sa posunie ako +1 do vyššieho rádu.



Obrázok 27. Indické násobenie $154_6 \cdot 432_6 = 125052_6$

3) 10 / 6 = 1,6666…; 18,32 / 6 = 3,0533333…

4) 6-ciferná perióda 076923, napríklad 1 / 17 má až 16-cifernú periódu.

5) 0,2 · 30 = 6 alebo 1/5 z 30 = 30 / 5 = 6.

6) 2358.

7) 11820, 11880.

8) $\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{42}$. Celé číslo vieme prepísať na tvar zlomku tak, že v menovateli bude jednotka, takže prevrátený zlomok k číslu 6 je 1/6.

9) (2400+50) / 8 = 300 + 6 zv. 2 alebo 2450 / 8 = 306 zv. 2.

05
50
2

Skúška 306 · 8 = 2448, 2448 + 2 = 2450.

10) Výsledok je vždy 1200. Najrýchlejšie to vyjde pravdepodobne pomocou egyptského násobenia, pretože 16 je mocnina dvojky a číslo 75 sa ľahko zdvojnásobuje: 75, 150, 300, 600, 1200.

11) Výsledok 1, prvé sa počíta 8 / 4.

12) 2 + 8 / (4 / 2 − 1).

VIII. Keď sa čísla stávajú písmenami

V tejto kapitole sa zoznámime s tým, ako sa v matematike používajú písmená na označenie čísel – takzvané premenné. Uvidíme, ako nám tieto písmená pomáhajú zjednodušiť zápisy a riešiť problémy vo všeobecnosti, nielen pre konkrétne čísla. Naučíme sa, čo sú rovnice a nerovnice, ako ich riešiť pomocou ekvivalentných úprav aj pomocou modelu rovnoramenných váh. Zoznámime sa aj s diofantickými rovnicami, ktoré majú riešenia len medzi celými číslami. V ďalších častiach kapitoly sa naučíme riešiť sústavy rovníc, pozrieme sa na lomené a kvadratické rovnice, a nakoniec si vysvetlíme, čo je to funkcia, ako ju možno zapísať, znázorniť a ako rozoznať priamu a nepriamu úmernosť. Kapitolu zakončíme jednoduchou, ale užitočnou metódou trojčlenky, ktorá nám pomáha riešiť úlohy z reálneho života.

Premenné

Premenné v matematike označujeme obvykle malými písmenami (nemusí to byť nutne x.) V prvých ročníkoch základnej školy pracujeme so *„skrytými číslami“* – to znamená, že premennú chápeme ako konkrétne číslo, ktorého hodnotu v tomto čase ešte nepoznáme. Premenné sú súčasťou **výrazov** – matematických zápisov, v ktorých vystupujú čísla, premenné a počtové operácie. Výrazmi môžeme vyjadriť rôzne skutočnosti jednoduchšie. Napríklad bežne používané vzorce sú matematickými výrazmi. Ak chceme povedať, že obsah obdĺžnika sa počíta ako súčin dĺžok jeho strán, výrazom $a \cdot b$ to vyjadríme oveľa stručnejšie.

Písmená v tomto výraze zastupujú konkrétne čísla – hodnoty premennej. Premenné sú to preto, že môžu mať rôznu hodnotu, v jednom prípade ale vždy tú istú. Keď počítame obsah jedného obdĺžnika, hodnoty premenných a a b sú presne dané. V inom obdĺžniku budú hodnoty zasa iné.

Okrem zjednodušenia zápisov premenné umožňujú objavovať vlastnosti platné pre všetky možné hodnoty naraz. Napríklad, ak chceme zistiť, ako sa zväčší obsah obdĺžnika, ak jeho strany zdvojnásobíme, nemusíme počítať nekonečne veľa príkladov typu: Ak bola jedna strana 2 cm a druhá 3 cm, obsah bol 6 cm^2. Po zdvojnásobení je jedna strana 4 cm, druhá 6 cm a obsah je 24 cm^2, čo je štyrikrát viac. Úlohu môžeme pomocou výrazu s premennými vyriešiť naraz pre všetky možné rozmery obdĺžnikov: pôvodne bol obsah $a \cdot b$, po zdvojnásobení bude $2 \cdot a \cdot 2 \cdot b = 4 \cdot (a \cdot b)$, takže štyrikrát viac.

Premenné môžu zastupovať veľa rôznych konkrétnych čísel – hodnôt. Niekedy zastupujú iba jedno alebo niekoľko čísel a našou úlohou je zistiť, ktoré číslo to je. Takéto premenné často nazývame **neznáme.**

Rovnice a nerovnice

Rovnosť je výrok (tvrdenie, o ktorom je možné uvažovať, či je pravdivé alebo nepravdivé). Napríklad 2 + 3 = 5 je pravdivý výrok, kým 2 + 3 = 4 je výrok nepravdivý. Podobne **nerovnosť** je výrok, ktorý obsahuje niektorý zo znakov nerovnosti: $<, >, \leq, \geq, \neq$. Môže byť pravdivý alebo nepravdivý. Hovoríme, že rovnosť (alebo nerovnosť) platí alebo neplatí.

Rovnica resp. **nerovnica** je zápis, ktorý obsahuje premenné (neznáme), za ktoré máme dosadiť také hodnoty, aby vzniknutá rovnosť, či nerovnosť, bola pravdivá.

$2x + 3 = 5$ je rovnica. Jej riešením je číslo $x = 1$, pretože $2 \cdot 1 + 3 = 5$ je rovnosť, ktorá je pravdivá, t. j. rovnosť platí.

$2x + 3 \geq 5$ je nerovnica. Jej riešením je napr. číslo $x = 10$, pretože nerovnosť $2 \cdot 10 + 3 \geq 5$ platí. Nerovnice mávajú obyčajne veľa riešení.

Lineárna rovnica o jednej neznámej

Ide o rovnicu, ktorá sa dá upraviť na tvar: $ax + b = 0$, kde a, b sú dané reálne čísla, číslo a je rôzne od nuly. Lineárnu rovnicu upravujeme pomocou ekvivalentných úprav až na tvar $x = \frac{-b}{a}$. Z toho je zrejmé, že lineárna rovnica o jednej neznámej má jedno reálne riešenie, ak $a \neq 0$. Ak by platilo $a = 0$, rovnica by sa stala rovnosťou a mala by teda buď nekonečne veľa riešení (úpravami sa redukuje na tvar 0 = 0), alebo žiadne riešenie, ak $b \neq 0$.

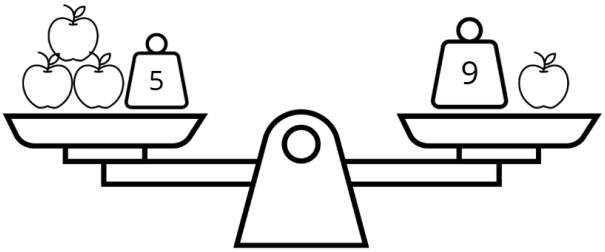
Ekvivalentné úpravy sú také úpravy rovnice, pri ktorých sa nemení množina riešení – čísel, ktoré možno dosadiť za premennú pri zachovaní pravdivosti. Ekvivalentné úpravy sa najľahšie ilustrujú na **modeli rovnoramenných váh:**

1. výmena pravej a ľavej strany rovnice – keď na váhach vymeníme pravú misku s celým obsahom za ľavú a naopak, rovnováha zostane zachovaná.
2. pripočítanie (alebo odpočítanie) ľubovoľného čísla alebo mnohočlena k obom stranám rovnice – keď pridám alebo odoberiem z oboch misiek rovnoramenných váh také isté závažie, rovnováha zostane zachovaná.
3. vynásobenie (alebo vydelenie) oboch strán rovnice rovnakým nenulovým číslom alebo mnohočlenom. Napr. odoberieme z každej

misky polovicu toho, čo tam je, rovnováha sa nezmení, pridám na obe misky ešte raz toľko, koľko už tam je, rovnováha sa nezmení.

✐ *Vyriešte rovnicu* $3x + 5 = 9 + x$ *pomocou modelu rovnoramenných váh.*

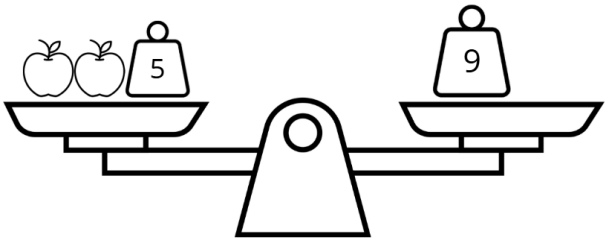
Neznámu si zakreslíme ako jabĺčko neznámej hmotnosti, čísla 5 a 9 sú závažia so známou váhou 5 a 9 (na váhových jednotkách teraz nezáleží).



Obrázok 28. Znázornenie rovnice $3x + 5 = 9 + x$

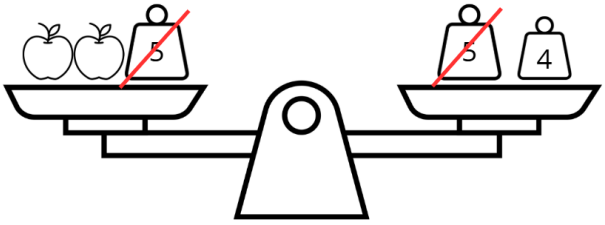
Riešenie pomocou ekvivalentných úprav by vyzeralo asi takto:

V prvom kroku sme z oboch strán vybrali jedno jabĺčko – rovnováha je zachovaná.



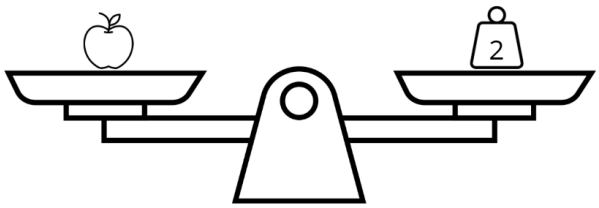
Obrázok 29. Riešenie rovnice na modeli rovnoramenných váh – 1. krok

V druhom kroku sme rozdelili závažie s váhou 9 na jedno s váhou 5 a jedno s váhou 4 a z oboch strán odstránili závažie s váhou 5.



Obrázok 30. Riešenie rovnice na modeli rovnoramenných váh – 2. krok

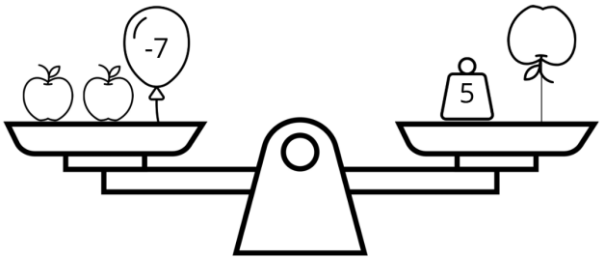
Nakoniec obe strany skrátime na polovicu.



Obrázok 31. Riešenie rovnice na modeli rovnoramenných váh – 3. krok

Riešením rovnice je preto $x = 2$.

Model rovnoramenných váh je výborným názorným spôsobom vizualizácie celého procesu riešenia lineárnej rovnice. Ekvivalentné úpravy sú niečím, čo vedia žiaci aj sami pomocou tohto modelu odvodiť. Istým nedostatkom je nie úplne jednoduché použitie záporných čísel. Napríklad rovnicu $2x - 7 = 5 - x$ by sme pomocou váh modelovali tak, že by sme si predstavili héliové balóniky, ktoré by misky ťahali opačným smerom.



Obrázok 32. Znázornenie rovnice $2x - 7 = 5 - x$

Pri tomto znázornení sme rovnicu fakticky prepísali na tvar $2x + (-7) = 5 + (-x)$ a záporné členy modelovali v prípade čísla -7 balónikom, ktorý ťahá ľavú misku váh silou 7 nahor. Člen $-x$ je reprezentovaný špeciálnym balónikovým jabĺčkom, ktoré ťahá pravú stranu váh smerom nahor takou istou silou, ako váži jedno obyčajné jabĺčko.

Hraním sa s takýmito predstavami môžeme prísť k ďalším úpravám, ktoré často pri riešení rovníc využívame: Záporné čísla „prehadzujeme“ na druhú stranu ako kladné. Pretože ak balónik ťahá jednu misku nahor, zároveň ťahá druhú misku nadol. (Matematicky ide stále o bežnú ekvivalentnú úpravu – pripočítanie toho istého čísla k obom stranám rovnice.) Napríklad na https://www.geogebra.org/m/uza2sk7y možno experimentálne overovať platnosť ekvivalentných úprav práve na takomto modeli.

Diofantické rovnice

V školskej matematike pracujeme často v množine celých, resp. prirodzených čísel. Rovnice, ktorých parametre (čísla) sú celé čísla a aj riešením sú iba celé čísla, sa nazývajú diofantické rovnice (podľa Diofanta z Alexandrie).

Diofantickou rovnicou o dvoch neznámych je rovnica $ax + by = c$, kde *a, b, c* sú celé čísla a navyše *a, b* sú nenulové. Takáto rovnica má riešenie vtedy a len vtedy, ak najväčší spoločný deliteľ čísel *a* a *b* je zároveň deliteľom aj čísla *c*.

✐ *Vyberte tie diofantické rovnice, ktoré nemajú žiadne riešenie:*

$$2x + 4y = 7$$

$$3x - 6y = 8$$

$$3x - 6y = 3$$

$$12x + 16y = 10$$

Prvá rovnica má na pravej strane násobky dvojky, ale ľavá strana nie je násobkom dvojky, preto nemôže mať riešenie. Druhá rovnica má zasa vľavo násobky trojky a vpravo nie. Tretia je riešiteľná, štvrtá má vľavo násobky štvorky, ale 10 nie je násobok 4, preto tiež nemá riešenie.

Riešiteľné diofantické rovnice majú vždy nekonečne veľa celých riešení, no zadaniu úlohy nemusia vyhovovať všetky, ale len niektoré z nich.

✐ *Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré vyhovujú rovnici* $2x + 3y = 15$.

x	**0**	**3**	**6**	9	12	…
y	**5**	**3**	**1**	−1	−3	…

Zadaniu úlohy vyhovujú len prvé tri riešenia (ak považujeme 0 za prirodzené číslo).

Prvé riešenie je možné nájsť odhadom. **Ďalšie riešenia sa dajú ľahko odvodiť:** všimnime si, že v *x*-riadku pridávame k prvému riešeniu násobky trojky (koeficient pred *y*) a v *y*-riadku zasa odčítavame násobky dvojky (koeficient pred *x*). Pri takomto riešení nezabúdajme urobiť skúšku správnosti aspoň pri poslednom takto odvodenom riešení: $12 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 15$.

✐ *Nájdite aspoň 8 rôznych riešení diofantickej rovnice* $3x - 4y = 10$.

x	−2	2	**6**	10	14	18	22	26	…
y	−4	−1	**2**	5	8	11	14	17	…

V tomto príklade sme uhádli vyznačenú možnosť a ďalšie sme odvodili – pokračovať môžeme na obe strany – pridávaním alebo uberaním. Všimnime si, že v tomto príklade naraz pridávame pri *x* aj pri *y*.

Diofantické rovnice sú často skryté v rôznych slovných úlohách.

✐ *Na dvore pobehujú sliepky a králiky. Spolu je tam 26 nôh. Koľko môže byť na dvore králikov a sliepok?*

Úloha sa dá prepísať na diofantickú rovnicu $2s + 4k = 26$, ktorú je možné upraviť na tvar $s + 2k = 13$ s riešeniami:

s	11	9	7	5	3	1	…
k	1	2	3	4	5	6	…

Predpokladáme, že na dvore sa nachádza aspoň jeden králik. Potom má úloha 6 rôznych riešení.

✐ *Ako môžeme zaplatiť sumu 19 eur pomocou dvoj- a päťeuroviek?*

$$2x + 5y = 19$$

x	−3	**2**	**7**	12
y	5	**3**	**1**	−1

Ak neuvažujeme o vydávaní, tak úloha má len dve možné riešenia.

(Ak by bola úloha postavená tak, že aj obchodník má len dvoj- a päťeurovky, ako je možné zrealizovať platbu? Potom sú správne aj riešenia záporné: Dáme 5 päťeuroviek a vydajú nám 3 dvojeurovky alebo dáme 12 dvojeuroviek a vydajú nám jednu päťeurovku. Mali by sme nekonečne veľa riešení.)

Všimnime si, že aj tu sme ďalšie riešenia tvorili tak, že k prvému uhádnutému sme pripočítavali pri x päťnásobky a pri y dvojnásobky odčítavali. Aj opačným smerom – pri x odčítali a pri y pripočítali.

Sústava dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych

Niekedy na vyriešenie problému potrebujeme použiť dve rovnice. Najmä ak máme dve neznáme a vieme medzi nimi nájsť dva vzťahy.

✐ *V cukrárni predávajú koláčiky a muffiny. Koláčik stojí 2 € a muffin 3 €. Zákazník kúpil spolu 7 kusov a zaplatil 17 €. Koľko kúpil koláčikov a koľko muffinov?*

Vzťahy medzi neznámymi možno zapísať rovnicami:

$k + m = 7$ pre súčet počtu koláčikov a muffinov,

$2k + 3m = 17$ pre sumu nákupu za koláčiky a muffiny.

Sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámych sa najčastejšie riešia dvomi spôsobmi:

Dosadzovacia metóda – z jednej rovnice vyjadríme jednu neznámu a túto dosadíme do druhej rovnice – tým dostaneme jednu rovnicu o jednej neznámej, ktorú vyriešime a spätne vyjadríme aj druhú neznámu. V tomto prípade napr. z prvej rovnice dostaneme $m = 7 - k$, dosadíme do druhej:

$2k + 3 \cdot (7 - k) = 17$

$2k + 21 - 3k = 17$

$21 - k = 17$

$k = 4$

Dopočítame $m = 7 - k = 3$. Takže muffiny boli tri a koláčiky štyri. Kontrolu správnosti urobíme tak, že dosadíme tieto hodnoty do oboch rovníc a zistíme, či platia.

Sčítacia metóda – rovnice vynásobíme (obe strany) nejakým vhodným číslom a potom celé rovnice sčítame tak, aby sa jedna neznáma sa vynululovala. V predchádzajúcom príklade by to vyzeralo takto:

$k + m = 7$ ..... / vynásobíme číslom −2, aby neznáma k vypadla:

$-2k + (-2m) = -14$

$\underline{2k + 3m = 17}$

$0 + m = 3$

Druhú neznámu k dopočítame z prvej rovnice.

Príklad, na ktorom sme demonštrovali dva najčastejšie spôsoby riešenia sústavy dvoch lineárnych rovníc, bol vhodný pre oba. To, ktorú metódu využijeme, závisí od konkrétnej úlohy. Niektoré sústavy sa viac hodia pre jeden a niektoré pre druhý spôsob. Riešiteľné sú ale vždy oboma.

Ďalšie typy rovníc

Lineárne rovnice nie sú jediným typom rovníc, s ktorými sa môžu žiaci na základnej škole stretnúť. Stručne si predstavíme ešte dva častejšie sa vyskytujúce typy: lomené rovnice a kvadratické rovnice.

Lomené rovnice

Lomené rovnice sú také rovnice, ktoré obsahujú neznámu v menovateli niektorého zlomku. Pri ich riešení postupujeme podobne ako pri lineárnych rovniciach – používame ekvivalentné úpravy. Navyše však musíme dať pozor na to, ktoré hodnoty neznámej sú zakázané, pretože by viedli k deleniu nulou.

Pri riešení postupujeme nasledovne:

1. Určíme **definičný obor** – zapíšeme, ktoré hodnoty neznámej nesmie nadobudnúť (napr. ktoré hodnoty premennej x robia menovatele nulovými).

2. Rovnicu upravíme na lineárnu – napríklad vynásobením najmenším spoločným násobkom menovateľov.
3. Rovnicu vyriešime pomocou ekvivalentných úprav a skontrolujeme, či riešenie patrí do definičného oboru.

✐ *Riešte rovnicu* $\frac{2}{x-3} = 1$

Definičný obor: $x \neq 3$ (lebo by bol nulový menovateľ). Vynásobíme rovnicu výrazom $x - 3$, čím dostaneme lineárnu rovnicu $2 = x - 3$. Pripočítame 3 k obom stranám a vidíme, že $x = 5$.

Kontrola: 5 patrí do definičného oboru ⇒ riešenie je $x = 5$.

Kvadratické rovnice

Kvadratické rovnice sú rovnice, ktoré obsahujú neznámu umocnenú na druhú. Ich základný tvar je:

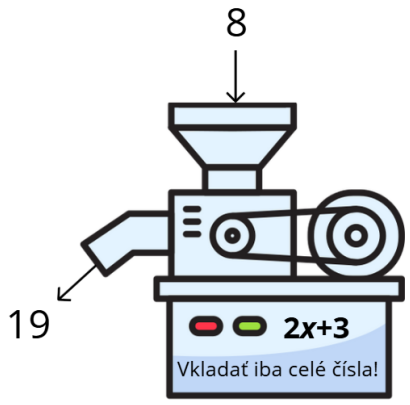
$$ax^2 + bx + c = 0$$

kde $a \neq 0$ a b, c sú reálne čísla. Na základnej škole sa žiaci väčšinou stretávajú len s jednoduchšími kvadratickými rovnicami, najmä takými, ktoré možno rozložiť na súčin alebo riešenie uhádnuť.

Užitočná vlastnosť, ktorú by mal učiteľ ovládať, je toto pravidlo: Ak koeficienty a, b, c sú celé čísla a kvadratická rovnica má racionálne riešenie tak, čitateľ tohto riešenia bude deliteľom čísla c a menovateľ deliteľom čísla a. Napríklad rovnica $x^2 + x - 6 = 0$ môže mať racionálne riešenia jedine z týchto: ±1, ±2, ±3 alebo ±6. Tieto má zmysel testovať. Rýchlo objavíme, že pre $x = 2$ a $x = -3$ rovnica platí. Ak by nevyšlo žiadne z týchto čísel, rovnica by nemala riešenie v množine racionálnych čísel. (V množine reálnych čísel môže mať – takéto riešenia ale neuhádneme.)

Funkcie

Funkcie si najjednoduchšie predstavujeme ako predpis, podľa ktorého z jedného čísla dostaneme iné číslo. Pekné znázornenie je napríklad prostredníctvom tzv. **čarovných mlynčekov.** Čarovný mlynček funguje tak, že do neho vkladáme povolené čísla a vypadávajú z neho iné čísla podľa určeného predpisu. Predpis je napísaný na obale.



Obrázok 33. Čarovný mlynček ako model funkcie

Pri úvodných hrách majú žiaci uhádnuť, aké číslo z mlynčeka vypadne, ak do neho vhodíme nejaké konkrétne číslo. Náročnejším typom úlohy by bolo nájsť číslo, ktoré do mlynčeka niekto vhodil podľa toho, čo vypadlo. Skutočnou výzvou by bola úloha nájsť predpis (ktorý sa záhadne stratil) experimentovaním a objavovaním rôznych dvojíc vstup – výstup. Čarovný mlynček by robil niečo s číslami a žiaci by mali prísť na to, čo.

V tomto modeli je dôležité poznamenať, že po opakovanom vhodení konkrétneho čísla vždy vypadne ten istý výstup. Môže sa stať, že dva rôzne vstupy vedú k tomu istému výstupu, ale nikdy sa nemôže stať, že z rovnakých vstupov vyjdú rôzne výstupy.

Rovnice a funkcie majú veľa spoločného. Rovnica sa skladá z pravej a ľavej strany. Ak je na pravej strane iba číslo, ľavú stranu môžeme chápať ako predpis funkcie, pre ktorú hľadáme, aké číslo treba vložiť za premennú, aby hodnota funkcie bola rovná číslu na pravej strane rovnice. Napríklad, ak nepoznáme vstup, ale len výstup, čarovný mlynček hore je riešením rovnice $2x + 3 = 19$.

Definícia funkcie

Ak si spomenieme na definíciu zobrazenia, budeme vedieť definovať aj funkciu. Ide totiž o zhodné pojmy. Rozdiel spočíva iba v oblasti ich použitia. Pojem funkcia sa častejšie používa v algebre či analytickej matematike, kým zobrazenie zasa v geometrii či teórii binárnych relácií.

Pripomeňme si: *Binárna relácia* z množiny M do množiny N je akákoľvek množina usporiadaných dvojíc $[a, b]$, pre ktoré a je z množiny M a b z množiny N. (Podrobnejšie sa tejto téme venujú napr. Híc – Pokorný, 2010.)

Zobrazenie je taká binárna relácia z množiny M do množiny N, pre ktorú platí: Každému prvku z množiny M je priradený práve jeden prvok množiny N. Inými slovami: Zobrazenie (aj funkcia) je taká množina usporiadaných dvojíc **vzor → obraz,** pri ktorej po voľbe vzoru – vstupu, vieme jednoznačne určiť jeho

obraz – výstup. Aby bola relácia zobrazením (funkciou), každý vstup môže mať najviac jeden výstup. Ak by mal mať viac, nešlo by o zobrazenie (funkciu).

Vzor obyčajne označujeme ako **nezávislá premenná** (môžeme ju ľubovoľne meniť) a obraz je **závislou premenou** (jeho hodnota závisí od hodnoty vzoru).

Funkciu často označujeme v tvare: $f: y = f(x)$, kde *f* je názov funkcie (hocijaké malé písmeno), *y* je závislá premenná a *x* nezávislá premenná.

Množina všetkých prípustných hodnôt nezávislej premennej sa nazýva **definičný obor funkcie** a označuje sa *D(f)*. Množina všetkých možných hodnôt závislej premennej sa nazýva **obor hodnôt funkcie** a označuje sa *H(f)*.

Funkcia býva obyčajne jednoznačne určená jednou z týchto troch možností:

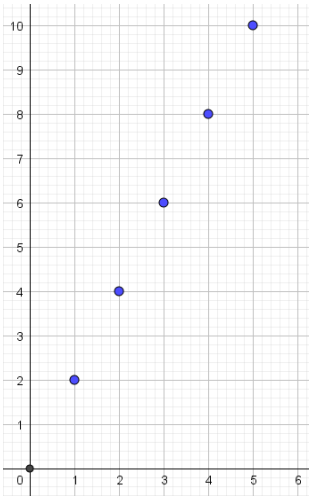
1. **Predpisom a definičným oborom:** Napr.: $f: y = 2x, D(f) = N$. Pozor vždy je nutné uviesť aj definičný obor. Funkcia: $g: y = 2x, D(f) = R$ nie je tá istá ako funkcia *f*. Na čarovných mlynčekoch by mal byť vždy uvedený predpis, ale aj definičný obor – množina čísel, ktoré do mlynčeka možno vkladať.
2. **Vymenovaním všetkých dvojíc [vzor, obraz]:** táto možnosť prichádza do úvahy len v prípade, ak definičný obor obsahuje len malý počet prvkov. Obyčajne sa dvojice pre prehľadnosť zapisujú do tabuľky. Tabuľka sa používa aj v prípade, ak je definičný obor väčší – nebude kompletná, ale na riešenie úloh môže byť prehľadnejšia ako predpis.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	…
y	0	2	4	6	8	10	12	14	…

Tabuľka hodnôt funkcie $f: y = 2x, D(f) = N$.

3. **Grafom funkcie:** Táto možnosť je jednoznačná v prípade, že definičný obor aj obor hodnôt sú ohraničené – je možné zakresliť všetky možné dvojice. Graf funkcie robíme aj v ostatných prípadoch pre jeho názornosť. Z grafu vieme rýchlo určiť, ako sa správa funkcia – či rastie, klesá, kde sa pretína s osou *x* alebo *y* a podobne.

Na obrázku 33 vidíme časť grafu funkcie $f: y = 2x, D(f) = N$ (nie je celý, pretože pokračuje do nekonečna), grafom funkcie $g: y = 2x, D(f) = R$ by bola priamka prechádzajúca tými istými bodmi, ktoré tvoria graf funkcie *f*.



Obrázok 34. Graf funkcie

Špeciálnymi typmi funkcií, s ktorými sa na základných školách stretávame najčastejšie, sú postupnosti, priama a nepriama úmernosť.

Postupnosti

Postupnosť je špeciálny typ funkcie. Je to každá funkcia, ktorej definičný obor je množina všetkých prirodzených čísel. Tým, že každá postupnosť má ten istý definičný obor – množinu všetkých prirodzených čísel, nie je nutné uvádzať dvojice [vzor, obraz], stačí napísať hodnoty obrazov v poradí. Funkcia *f* z predchádzajúceho textu je postupnosťou, a preto ju môžeme zapísať aj v tvare: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, … alebo všeobecne (*n*-tý člen postupnosti je rovný číslu 2*n*). Členy postupnosti nemusia byť iba celé čísla. Môžu to byť akékoľvek reálne čísla. Postupnosti môžu byť definované:

1. **všeobecným predpisom** – napr.: $a_n = 2n$. Všeobecný predpis je prakticky totožný so štandardným zápisom funkcie. Namiesto závislej premennej *y* máme *n*-tý člen postupnosti.
2. **vymenovaním prvých niekoľko prvkov,** ak sa z nich dá odvodiť, aké prvky budú nasledovať – 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, … alebo
3. **predpisom, ako z predchádzajúcich prvkov vypočítať nasledujúci** – $a_{n+1} = a_n + 2$, pričom musíme určiť prvý prvok: $a_0 = 0$.

Zaujímavými známymi postupnosťami sú **periodické** postupnosti – členy sa pravidelne opakujú, **Fibonacciho** postupnosť – postupnosť, pre ktorú platí $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = 1, a_1 = 1$, **aritmetické** postupnosti, pre ktoré platí $a_{n+1} = a_n + d$, kde *d* je číslo, o ktoré sa členy zväčšujú, **geometrické** postupnosti, ktoré sa zväčšujú *q*-násobkom: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

Priama úmernosť

Priama úmernosť je vzťah medzi dvoma premennými, ktorý možno napísať ako funkciu s predpisom $y = a \cdot x$, kde a je konkrétne číslo. Príkladov môžeme nájsť nespočetne veľa:

✐ *Vyjadrite závislosť obvodu štvorca od dĺžky jeho strany*

$O = 4a$. Pre prehľadnosť uvedieme dvojice vzor – obraz do tabuľky, v ktorej horný riadok bude naplnený prirodzenými číslami zoradenými podľa veľkosti a spodný riadok bude obsahovať obrazy čísel z horného riadku.

a	0	1	2	**3**	4	5	**6**	7	…
O	0	4	8	**12**	16	20	**24**	28	…

Všimnime si, že rozdiel susedných hodnôt závislej premennej je vždy 4. Navyše platí ďalšia všeobecne známa vlastnosť priamej úmernosti: **Zdvojnásobením hodnoty nezávislej premennej sa zdvojnásobí aj hodnota závislej premennej.**

✐ *Vyjadrite závislosť dráhy od času alebo rýchlosti pri rovnomernom priamočiarom pohybe.*

Dráha pri rovnomernom priamočiarom pohybe sa počíta pomocou vzorca $s = v \cdot t$. Tu máme však dve nezávislé premenné – jednu z nich si teda zafixujme. Riešime otázku, ako závisí prejdená dráha od času, ak sa teleso pohybuje stále rovnakou rýchlosťou (napr. 5 km/hod). Opäť bude platiť, že zdvojnásobením času sa zdvojnásobí aj dráha, trikrát viac času znamená trikrát dlhšia cesta. Podobne, ak by sme zafixovali čas – ako sa mení prejdená dráha od rýchlosti auta, ak vždy meriame v rovnakom časovom intervale? Čím ideme rýchlejšie, tým ďalej dôjdeme. Dvakrát rýchlejšie = dvakrát ďalej.

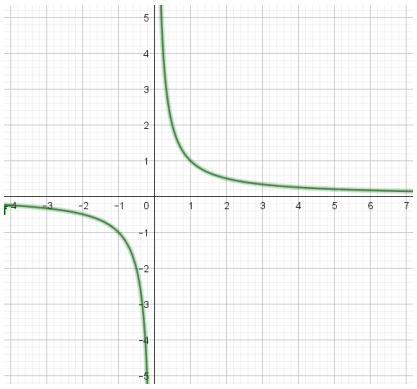
Pri priamej úmernosti je užitočné vždy sa zamyslieť nad tým, či násobok hodnoty nezávislej premennej skutočne rovnako znásobí aj hodnotu závislej premennej. To, že so stúpaním jednej premennej stúpa aj druhá, nemusí byť vždy dostatočným dôkazom o tom, že ide o priamu úmernosť.

✐ *Jurko má desať guľôčok. Každý deň vyhrá ďalšie tri. Koľko guľôčok bude mať po desiatich dňoch?*

Počet Jurkových guľôčok sa so zvyšovaním počtu dní zvyšuje, ale nie priamoúmerne. Priamoúmerne by to bolo, ak by na začiatku nemal žiadne guľôčky. Takto je počet jeho guľôčok daný vzťahom $g = 10 + 3t$, čo nie je priama úmernosť. (Vzťah medzi pridanými guľôčkami a časom už priamou úmernosťou je.)

Nepriama úmernosť

Matematicky ide o vzťah: $y = \frac{a}{x}$, kde a je konštanta. Grafom je takáto krivka:



Obrázok 35. Nepriama úmernosť

Príklady na nepriamu úmernosť zaraďujeme medzi tie náročnejšie. Často sa dajú odvodiť z príkladov na priamu úmernosť:

✐ *Zistite, ako závisí veľkosť jednej strany obdĺžnika od druhej, ak obsah má byť vždy 10 cm².*

Vzťah môžeme vyjadriť vzorcom $b = \frac{10}{a}$. Niekoľko hodnôt zakreslíme do tabuľky:

a	1	**2**	3	**4**	5	10	20	…
b	10	**5**	10/3	**2,5**	2	1	0,5	…

Všimnime si, že **zdvojnásobením nezávislej premennej sa závislá premenná zmenší na polovicu.** Navyše súčin hodnôt v jednom stĺpci je stále rovnaký.

✐ *Opíšte závislosť medzi rýchlosťou a časom pri rovnomernom pohybe, ak prejdená dráha je vždy 10 km.*

Ak pôjdem dvakrát rýchlejšie, cesta bude trvať len polovicu času. Vzťah sa dá vyjadriť rovnicou $t = \frac{10}{v}$.

Pozor! To, že jedna premenná sa zväčšuje a to spôsobuje zmenšovanie druhej ešte neznamená, že ide o nepriamu úmernosť:

✐ *Jožko má 20 autíčok. Každý deň mu jedno vezmem. Popíšte závislosť počtu autíčok od času.*

Po jednom dni bude mať 18 autíčok, po dvoch dňoch 16, atď. So zvyšovaním času sa zmenšuje množstvo autíčok, no ak by išlo o nepriamu úmernosť, musel by mať po dvoch dňoch polovicu autíčok, ktoré mal po jednom dni. Po zakreslení tejto funkcie do grafu by sme videli, že ide o lineárnu závislosť (body grafu ležia na priamke), ale nie o priamu ani nepriamu úmernosť.

Trojčlenka

Trojčlenka je často používaný (nie jediný) spôsob riešenia úloh na priamu alebo nepriamu úmernosť. Používame ju v úlohách, kedy poznáme vzťah medzi dvoma premennými – je to priama alebo nepriama úmernosť, čo zistíme podľa kontextu. Ďalej poznáme tri údaje a potrebujeme dopočítať štvrtý. Do jedného riadku napíšeme vzťah medzi dvoma známymi údajmi a do druhého neznámu spolu so známym údajom tak, aby príslušné veličiny boli pod sebou.

Napríklad v úlohe o práci – dvaja robotníci spravia určitú prácu za 15 dní, koľko robotníkov potrebujeme, aby to spravili za 10 dní? Zapíšeme

2 15

x 10

V ľavom stĺpci sú robotníci, v pravom dni. Dvom robotníkom priradíme 15 dní. Neznámemu počtu 10 dní. Potom nakreslíme šípku smerom od neznámej:

↑ 2 ..... 15 ↓

x 10

A druhú šípku buď rovnakým smerom, ak je vzťah priamou úmernosťou, alebo opačným smerom, ak je vzťah nepriamou úmernosťou – ako v našom príklade.

Pozdĺž šípok v ich smere píšeme zlomky, ktoré sa budú rovnať:

$$\frac{x}{2} = \frac{15}{10}$$

Riešením tejto rovnice dostávame riešenie $x = 3$.

Čo si zapamätať?

- Premenná označuje číslo, ktoré môže nadobúdať rôzne hodnoty. Nazýva sa aj neznámou a označuje sa malými písmenami.
- Rovnosť a nerovnosť sú matematické výroky, ktoré môžu byť pravdivé alebo nepravdivé.
- Rovnica resp. nerovnica je zápis, ktorý obsahuje premenné (neznáme), za ktoré máme dosadiť také hodnoty, aby vzniknutá rovnosť, či nerovnosť, bola pravdivá.
- Ekvivalentné úpravy nemenia množinu riešení rovnice. Model rovnoramenných váh pomáha vizualizovať riešenie rovníc.
- Diofantické rovnice sú rovnice, ktorých riešením sú celé čísla.

- Lineárne rovnice sú rovnice, ktoré možno ekvivalentnými úpravami upraviť na tvar $ax + b = 0$, majú jedno riešenie, ak $a \neq 0$.
- Sústava rovníc sa rieši metódou dosadzovania alebo sčítania.
- Lomené rovnice obsahujú neznámu v menovateli – musíme dať pozor na zakázané hodnoty.
- Kvadratické rovnice sa dajú upraviť na tvar $ax^2 + bx + c = 0$ a niektoré vieme riešiť uhádnutím.
- Funkcia je predpis, ktorý každému vstupu priraďuje práve jeden výstup. Funkciami sú aj postupnosti, priama a nepriama úmernosť.
- Nie každý vzťah, kde s rastom jednej premennej klesá druhá premenná, je nepriama úmernosť.

Úlohy

1) Ak za jedno euro dostanem 25 českých korún, koľko eur potrebujem na 750 českých korún?

2) Je potrebné zorať 50 árov pôdy. Jednému oráčovi by to trvalo 50 dní. Koľko potrebujeme najať oráčov, aby bola práca hotová za 5 dní?

3) 3 kg jabĺk stoja 5 eur. Vyjadrite vzťah medzi hmotnosťou jabĺk v kilogramoch a cenou.

4) Vstupenka do kina stojí 8 eur, detská 7 eur. Vyjadrite vzťah medzi počtom dospelých a detských návštevníkov a celkovou cenou za ich lístky.

5) Vyriešte diofantickú rovnicu: $2x + 7y = 15$ v množine prirodzených čísel. Nájdite všetky riešenia.

6) Vyriešte diofantickú rovnicu v množine celých čísel: $27x + 9y = 15$. Riešenie zdôvodnite.

7) Vyriešte sústavu rovníc: $3a + 2b = 8$ a $a - 2b = 11$.

8) Vyriešte rovnicu: $\frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{x-2}$.

9) Je daná kvadratická rovnica $x^2 + bx + c = 0$. Je známe, že ak má riešenie z množiny celých čísel, tak musí byť deliteľné číslom c. Skúste tento fakt odvodiť z prepisu rovnice na tvar $(x - k_1)(x - k_2) = 0$, kde k_1 a k_2 sú jej riešenia (korene).

10) Z čarovného mlynčeka zmizol predpis, na základe ktorého mení čísla. Vieme, že možno vhadzovať ľubovoľné celé čísla. Skúsili sme niekoľko pokusov a tieto čísla nám vypadli: $0 \to 1$, $1 \to 3$, $2 \to 5$, $-1 \to -1$. Aký mohol byť predpis?

11) Zostrojte graf funkcie f: $y = 0{,}5x - 4$, ak x patrí do množiny $\mathbb{R}$. Pre akú hodnotu nezávislej premennej nadobúda táto funkcia nulovú hodnotu?

12) Pole je potrebné zorať za 15 dní. Po 5 dňoch práce jedného oráča k nemu priberieme druhého. Spolu potom dokončia orbu práve v plánovanom čase. Koľko dní pracovali spolu obaja oráči?

Riešenia

1) 30 eur.

2) Desaťkrát viac oráčov znamená skrátenie doby na jednu desatinu. Počet oráčov zodpovedá vzťahu $o = \frac{50}{t}$, kde za t dosadíme 5 dní. Potrebujeme najať 10 oráčov.

3) $c = \frac{5}{3} \cdot m$, kde m je hmotnosť a c cena.

4) $c = 8v + 7m$, kde c je cena, v počet dospelých (veľkí) a m počet detí (malí).

5) Riešenie, ktoré vieme hneď uhádnuť je napr. $2 \cdot 4 + 7 \cdot 1 = 15$. Ďalšie by sme dostali buď tak, že od 4 odpočítavame sedmičku a k 1 pripočítavame dvojku [−3, 3], alebo k 4 pripočítavame sedmičku a od 1 odpočítavame 2 [11, −1]. Žiadne už ale nebude také, aby obe čísla boli kladné. [4, 1] je jediné riešenie.

6) Nemá riešenie, pretože ľavá strana je určite násobkom deviatky, ale pravá nie.

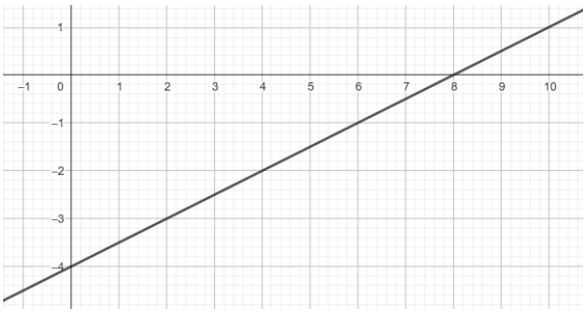
7) $a = 19/4 = 4{,}75$; $b = -25/8 = -3{,}125$.

8) Nemá riešenie, pretože po vynásobení menovateľom vyjde riešenie $x = 2$, a to nie je platné – menovateľ by bol nulový.

9) Po roznásobení $(x - k_1)(x - k_2) = x^2 + (k_1 + k_2)x + k_1k_2$ vidíme, že člen $c = k_1k_2$. Keďže c je celé číslo a k_1 tiež, je jasné, že musí byť deliteľom čísla c. Dokonca môžeme povedať, že aj druhé riešenie bude istotne celé číslo a vieme ho vypočítať ako podiel c/k_1.

10) $2x + 1$.

11) Nulovú hodnotu nadobúda tam, kde graf pretína os x, takže pre $x = 8$.



Obrázok 36. Graf funkcie f: $y = 0{,}5x - 4$

12) 10 dní.

IX. Slovné úlohy

Slovné úlohy sú neoddeliteľnou súčasťou vyučovania matematiky na základnej škole. Sú to úlohy, ktoré sú formulované slovne a vyžadujú, aby žiaci rozumeli textu, pochopili kontext a použili matematiku na riešenie problémov zo života. Slovné úlohy rozvíjajú nielen matematické schopnosti, ale aj čitateľskú gramotnosť, logické myslenie a schopnosť pracovať s informáciami. V tejto kapitole si vysvetlíme, čo slovné úlohy znamenajú, na aké časti sa delia, aké sú najčastejšie problémy pri ich riešení a akým spôsobom môžeme proces riešenia systematicky viesť.

Pojem slovná úloha

Slovné úlohy sú súčasťou každého tematického celku v matematike. Sú prvými úlohami, s ktorými sa žiaci na základnej škole stretávajú. Spočiatku bývajú zadávané ústne. Keď sa žiaci naučia dobre čítať s porozumením, môžu byť zadania aj písomné. Slovné úlohy sú často vnímané ako náročné. **Základné ťažkosti žiakov** špecifické pre riešenie slovných úloh môžeme zhrnúť do troch bodov:

- žiak nerozumie kontextu úlohy alebo nevidí súvislosť medzi kontextom a riešením slovnej úlohy,
- žiak z rôznych dôvodov (napr. dĺžka textu, použitý jazyk, veľké množstvo zadaných informácií, ťažkosti čítať text s porozumením) neuspeje pri získavaní informácií o štruktúre slovnej úlohy zo zadania,
- žiak získa potrebné informácie zo zadania, ale nevie nájsť vhodný matematický model alebo model nájde, ale nevie ho vyriešiť (Hejný a kol., 2004).

Definovať slovnú úlohu nie je jednoduché. Pod pojmom slovná úloha v didaktike matematiky rozumieme takú **matematickú úlohu, ktorá je daná slovne, vyžaduje jazykové porozumenie a má presah do životnej skúsenosti človeka.**

Rozoberme teraz túto definíciu:

To, že slovná úloha je **matematickou úlohou,** neznamená, že sa s ňou žiaci stretnú iba na hodine matematiky. Matematickou je z dôvodu, že na jej vyriešenie je potrebné použiť matematiku.

Slovná úloha vyžaduje **jazykové porozumenie** a má presah do **životných skúseností** – to zasa znamená, že na jej vyriešenie nestačí počítať. Žiak musí v prvom rade dobre porozumieť zadaniu. Zadanie nesmie byť v zmysle: „Povedz, koľko je tri plus tri." Zadanie musí vychádzať z reálnej skúsenosti. Reálnou skúsenosťou môže byť aj nereálny (rozprávkový) kontext. Dôležité je, aby žiak rozumel tým aspektom, ktoré nie sú v zadaní explicitne vyjadrené.

Správne porozumenie slovnej úlohy sa týka štyroch oblasti:

Vrstva príbehu, či situácie – týka sa rámcových predstáv o úlohe.

Vrstva objektov – sem zaraďujeme všetky podmety textu úlohy, premenné.

Vrstva vzťahov – väzby medzi objektmi úlohy.

Vrstva matematického modelu – ktorým matematickým modelom je možné úlohu riešiť.

✐ *Patrik sa spýtal dedka, ako dlho sa učil plávať. Dedko odpovedal, že asi decimesiac. Patrik chvíľu prekvapivo zízal a potom s úsmevom povedal: „Dedko, ja som to zvládol za dva dni!" Za ako dlho sa naučil plávať dedko?*

Vrstva príbehu je predstava o rozhovore dedka a vnuka o učení sa plávať.

Vrstva objektov obsahuje dedka, Patrika, čas učenia sa.

Vrstva vzťahov obsahuje vzťah – Patrik: 2 dni, dedko: decimesiac.

Otázka je zameraná na čas učenia sa dedka. Tento údaj máme v zadaní určený, takže slovná úloha na prvý pohľad nemusí byť matematizovaná a môže byť považovaná za jazykové cvičenie typu: vyhľadaj v texte odpoveď na otázku. Z dobrého porozumenia kontextu úlohy a zo životných skúseností prídeme na to, čo je problém: decimesiac nie je používanou mierou na meranie času. Takže otázkou je, ako toto neštandardné označenie prepísať pomocou zaužívanejšej jednotky. Celé zadanie sa nám teda redukuje do jednoduchej otázky:

Matematický model: decimesiac … ? dní

Zložky slovnej úlohy

Každá slovná úloha sa skladá z dvoch častí: **popisu situácie a otázky.** Popis situácie by mal obsahovať všetky informácie, ktoré žiak potrebuje k jej vyriešeniu. Niektoré z informácií môžu byť skryté – žiak si ich musí dohľadať z dostupných zdrojov. Napríklad: „Peter si myslí, že najčastejšie písmeno v slovenských textoch je A, Pavol nesúhlasí a hovorí, že je to E. Zisti, ktoré písmeno je používané najčastejšie v texte, ktorý práve čítate na hodinách literatúry."

Alebo informácia, ktorá nie je zadaná, by mala byť každému žiakovi známa. Napríklad: „Vajíčko sme vložili do vriacej vody a varili pol decihodiny. Bolo uvarené natvrdo?“ Zadanie predpokladá, že žiak vie (alebo vie zistiť), po koľkých minútach varenia bude vajíčko uvarené natvrdo.

Zadanie nemusí obsahovať len slovný popis situácie. Vhodným doplnením zadania bývajú aj ilustrácie. Prípadne popis situácie úplne chýba a žiak musí vydedukovať kontext priamo z otázky: Napríklad: „O koľko dní má viac najdlhší mesiac v roku od najkratšieho mesiaca v roku?“

Ak chceme, aby žiaci nepodceňovali fázu porozumenia, dávajme im úlohy **s nadbytočnými informáciami** (údaje, ktoré nie sú potrebné na vyriešenie úlohy.)

Zadanie by malo obsahovať aspoň jednu otázku alebo výzvu. Ak chceme žiakov viesť k tomu, aby formulovali odpovede, zadávajme im úlohy **s viacerými otázkami.** Na jednootázkové slovné úlohy budú totiž často odpovedať jedným slovom alebo číslom. Ak má úloha otázok viac, sami prídu na potrebu sformulovať odpoveď celými vetami. Ak nie je zadaná otázka, ale len výzva, žiak má z pochopenia kontextu prísť na to, čo je otázkou.

Kontext, v ktorom je slovná úloha situovaná, by mal byť žiakom **blízky a pútavý.**

Delenie slovných úloh

Slovné úlohy môžeme deliť podľa rôznych kritérií. Napríklad na úlohy jednoduché a zložené. **Jednoduché** úlohy si vyžadujú použitie iba jednej aritmetickej operácie. Tieto ďalej môžeme deliť na úlohy na sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie. **Zložené** si vyžadujú viac operácií.

Často delíme slovné úlohy **podľa kontextu** na úlohy o zmesiach, o práci, o pohybe, o nákupoch, o malých jedlých veciach, o hračkách a ich vlastnení, o veku, o teplomere… Sú to kontexty, ktoré sa vyskytujú najčastejšie.

Riešenie slovnej úlohy

Riešenie slovnej úlohy vo všeobecnosti prebieha v niekoľkých krokoch.

Rozbor zadania

Táto fáza riešenia slovnej úlohy patrí medzi najdôležitejšie. Bez správneho pochopenia zadania nie je možné úlohu správne riešiť. To, či žiak správne porozumel zadaniu, závisí od mnohých faktorov – čitateľská gramotnosť,

vlastná skúsenosť s podobnou situáciou. Predtým než učiteľ pristúpi k ďalším etapám riešenia slovnej úlohy, je potrebné overiť, či žiaci naozaj:

1. rozoznávajú osoby/predmety a vzťahy medzi nimi,
2. dokážu situáciu popísať vlastnými slovami,
3. rozumejú, čo majú zistiť/vypočítať/nájsť.

Ak úloha neobsahuje všetky potrebné údaje, zisťujeme, kde sa dajú nájsť.

V tejto fáze robíme **predbežný odhad výsledku** – to nám pomôže pri overení, či neskôr získaný výsledok je správny. Môže sa stať, že pri predbežnom odhade objavíme správne riešenie úlohy. Ešte však nevieme overiť, či neexistuje aj iné správne riešenie.

Matematizácia – vytvorenie matematického modelu

Proces matematizácie patrí k najnáročnejším krokom riešenia slovnej úlohy. V tomto kroku vyberáme z textu údaje, ktoré sú potrebné a vynechávame tie, ktoré nepotrebujeme. Abstrahujeme od nepodstatných podrobností a vytvárame matematický model situácie. Úloha sa v tejto fáze stáva matematickou.

Súčasťou tvorby abstraktného matematického modelu je aj vytváranie **vhodnej formy zápisu.** Zápis nemusí byť len písomný. V jednoduchších úlohách si žiak vytvorí zápis iba v hlave, prípadne podčiarkne v zadaní potrebné údaje. Veľmi vhodné bývajú grafické znázornenia objektov a vzťahov medzi nimi.

Najčastejšie spôsoby matematizácie možno rozdeliť do dvoch typov:

Algebrické riešenie (analytický prístup) – označíme to, čo chceme vypočítať, neznámou. Vyjadrujeme ostatné vzťahy vzhľadom na túto neznámu a zostavujeme rovnicu/sústavu rovníc/nerovnicu.

Aritmetické riešenie (syntetický prístup) – vychádzame zo známych údajov, počítame ďalšie a ďalšie údaje, až prídeme k hľadanému výsledku.

Pokus – omyl – vytvoríme systém zapisovania výsledkov jednotlivých pokusov, napr. tabuľku.

✐ *Jožko mal našetrené peniažky. Jeho priateľka Ema mu vzala 20 eur na kúpu kabelky. O 5 dní neskôr mal Jožko narodeniny. Dedko mu dal 40 eur. Ema si ešte potrebovala kúpiť tričko, tak vzala Jožkovi ďalších 15 eur. Jožko si potom kúpil za všetky zvyšné peniaze kabát, ktorý stál 50 eur.*

Algebrické riešenie – rovnica $x - 20 + 40 - 15 = 50$.

Aritmetické riešenie – začneme od konca a postupne dopočítame, koľko mal na začiatku.

Pokus – omyl – vytvoríme tabuľku:

	Stav	−20 Ema	+40 dedko	−15 Ema	Kabát 50
1. pokus	100	80	120	105	55
2. pokus	50	30	70	55	5

Vyriešenie matematickej úlohy

Matematická úloha, ktorá vznikla v procese matematizácie, je v tomto kroku riešená matematickými prostriedkami. Čiže napríklad, ak výsledkom matematizácie bola rovnica s jednou neznámou, v tomto kroku rovnicu vyriešime.

V tejto fáze môžeme robiť **prvú kontrolu správnosti** riešenia matematickej úlohy, ak je to efektívne. Napríklad, ak sme riešili rovnicu, dosadíme koreň do pôvodnej rovnice a overíme rovnosť. Ak kontrola nevychádza, musíme znovu preveriť matematické riešenie, dohľadať chybu vo výpočtoch a pod.

Okrem bežných matematických postupov riešenia je v niektorých prípadoch prípustné používať aj metódu **pokus – omyl.** Táto metóda sa dá použiť na množstvo matematických úloh. Je založená práve na opakovanej kontrole správnosti s vhodne zvolenými číslami. Efektívna je vtedy, ak kontrola správnosti je jednoduchšia ako priame počítanie. Výsledok skúšame tipnúť a kontrolou správnosti overujeme, či je správny. Príkladom môže byť riešenie jednoduchých rovníc v druhom ročníku základnej školy. Žiaci majú vyriešiť rovnicu $x - 14 = 5$. Druháci ešte nemôžu vedieť, že táto rovnica sa dá ekvivalentnou úpravou upraviť na tvar $x = 5 + 14$. Namiesto toho môžu postupovať takto:

Skúšame náhodné čísla – vyhovujú zadaniu?

Podľa výsledkov, ktoré nám vznikajú, upravujeme pokusy (skúšame väčšie alebo menšie čísla) – v našom príklade vidíme, že číslo musí byť väčšie ako 14.

Po viacerých pokusoch môžeme objaviť nové vzťahy a zákonitosti, ktoré nám pomôžu vytvoriť model, pomocou ktorého dopočítame výsledok – v našom príklade prídeme na to, že to číslo musí byť naozaj o päť väčšie ako 14. (Väčšinou sa nám podarí objaviť výsledok, keďže často mávajú úlohy „pekné výsledky.“)

Dematematizácia – návrat do pôvodnej situácie

Po vyriešení a overení riešenia matematickej úlohy, nastáva často nedoceňovaný krok – dematematizácia. Získaný výsledok je potrebné vnoriť do kontextu zadania. Vrátiť ho do reálnej situácie a odpovedať na otázku.

V tejto fáze robíme aj **druhú kontrolu správnosti:** pýtame sa, či nami vypočítaný výsledok je reálny vzhľadom na kontext úlohy. Ak sme urobili predbežný odhad výsledku, je dobré porovnať tento odhad so získaným výsledkom. Ak výsledky nekorešpondujú so zadaním, bude nutné vrátiť sa k prvému kroku riešenia – znovu si prečítame zadanie a vytvoríme iný matematický model, ktorý bude zadaniu lepšie vyhovovať.

Každé riešenie slovnej úlohy končiace správnou odpoveďou je správne – nenúťme deti riešiť slovné úlohy podľa nami zvoleného postupu.

✐ *V obchode bolo niekoľko chlebov. Polovicu z nich plus pol chleba kúpila pani kuchárka pre kuchyňu. Zo zvyšných chlebov polovicu plus pol chleba kúpil pán Novák. Posledný chlieb si kúpila pani Malá. Koľko chlebov bolo v obchode na začiatku? Koľko chlebov bolo rozpolených?*

Rozbor zadania: V zadaní vystupujú chleby, kuchárka, pán Novák a pani Malá. Kuchárka vzala polovicu chlebov plus pol chleba, pán Novák polovicu zo zvyšku plus pol chleba a pani Malá jeden. Otázka je, koľko bolo chlebov na začiatku. Predbežne odhadujeme, že výsledkom by malo byť prirodzené číslo väčšie ako 3.

Matematizácia môže byť vykonaná viacerými spôsobmi:

algebricky: na začiatku x

kuchárka ..... $x/2 + 1/2$

Novák ..... $(x -$ toto hore$)/2 + 1/2$

Malá 1

Spolu x.

Zostavíme rovnicu $x = x/2 + 1/2 + (x - x/2 - 1/2)/2 + 1/2 + 1$

aritmeticky (v kombinácii s metódou pokus omyl) postupujeme odzadu:

pani Malá ..... 1 chlieb

Novák ..... 1/2 chleba a ?

Uvažujem, ak boli pred Novákom 4 chleby, vzal si dva a polovicu – muselo by zostať 1,5 chleba, ale zostal iba jeden. Ak boli pred ním 3 chleby, vzal si 1,5 a polovicu, takže zostal jeden.

Novák ..... 2 chleby

kuchárka ..... 1/2 chleba a polovica všetkého.

Po kuchárke zostali 3 chleby. Ak by bolo na začiatku 6 chlebov, vzala by si 3 a pol chleba, a zostalo by iba 2,5 chleba. Ak bolo na začiatku 7 chlebov, vzala by si 3,5 a pol chleba a to sedí.

Pokus – omyl: vytvoríme si systém a postupne objavujeme, aké čísla dávajú zmysluplné výsledky.

Prvý tip: Na začiatku boli 4 chleby: kuchárka si vzala 2 a pol, Novák si nemôže vziať polovicu zvyšku. Takto to vyjde vždy, keď skúsim párne číslo.

Druhý tip: Na začiatku bolo 5 chlebov: kuchárka si vzala 2 a pol plus pol = 3 chleby, zostali 2, Novák si vzal 1 a pol, zostala len polovica – mal zostať celý.

Tretí tip: párne čísla nejdem skúšať. Vyskúšam 7: kuchárka si vzala 3 a pol plus polovicu, zostali 3 chleby, Novák si vzal 1 a pol a polovicu a zostal jeden – hurá! Sedí to!

Riešenie matematickej úlohy:

Pri rôznych spôsoboch matematizácie dostávame rôzne matematické úlohy. Aritmetické a pokus – omyl riešenia nám hneď v procese matematizácie súbežne riešia aj danú úlohu. Riešenie algebrickej úlohy by bolo:

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\left(x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{1}{2} + 1$$

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 2 - \frac{1}{4}$$

Teda $x = 7$.

Kontrola správnosti matematickej úlohy spočíva v dosadení čísla 7 do rovnice a overení, či vyjde rovnosť.

Dematematizácia

Vyšlo nám číslo 7. Prečítame si znovu zadanie a vidíme, že dokážeme úspešne odpovedať na prvú z položených otázok: „V obchode bolo na začiatku sedem chlebov.“ Následne prejdeme celým zadaním a overíme, či všetko sedí: Bolo sedem, kuchárka vzala 4 chleby, Novák polovicu z troch plus pol, to je dva, takže jeden zostal pani Malej.

Zadanie však obsahuje aj druhú otázku, na ktorú potrebujeme zistiť odpoveď. Musíme sa teda vrátiť ku kroku 2 – matematizácii – využijeme už existujúci model alebo vytvoríme nový. V prípade algebrického riešenia nám tento model

nedokáže zodpovedať otázku o počte rozpolených chlebov. Model v metóde pokus – omyl toto dokáže.

Krásnym riešením môže byť aj aritmetické **riešenie grafickým znázornením** – iný matematický model: nakreslíme 7 chlebov a budeme vyfarbovať alebo škrtať. Kuchárka si vzala 3 a pol – jeden musíme rozpoliť, aby sme dostali dve polovice pre pani kuchárku. Zostali nám tri celé chleby, ale pán Novák si vzal 1 a pol a pol chleba, takže zasa musíme jeden rozpoliť. Vyjde nám, že rozpolené museli byť aspoň dva chleby.

Význam voľby vhodného matematického modelu ilustrujeme na nasledujúcom príklade:

✐ *Pán so psom sa vybrali na vychádzku. Keď boli 10 km od domu, otočili sa s tým, že pôjdu naspäť. Pán išiel priemernou rýchlosťou 5 km/h. Pes sa ale chcel prebehnúť, a tak bežal domov napred. Pes beží priemernou rýchlosťou 10 km/h. Keď dobehol domov, ihneď sa otočil a vydal sa späť za pánom. Niekde na ceste sa stretli, ale psovi sa opäť nechcelo ísť pomaly, otočil sa a bežal zasa domov. Týmto spôsobom behal stále domov a k pánovi, domov a k pánovi atď. Akú vzdialenosť pes nabehal?*

Prvou voľbou je model, v ktorom budeme počítať jednotlivé vzdialenosti – najprv pes prebehol 10 km domov. Pán zatiaľ prešiel 5 km. Pes bežal k nemu – rýchlosť ich približovania bola 15 km/h. Takto prešli spolu 5 km, takže sa stretli o 1/3 hodiny = 20 minút. Pes prešiel teda 2/3 z 5 km, a pán 1/3 z 5 km. Pes túto istú dráhu prešiel na ceste domov… riešenie je zdĺhavé a v princípe nekonečné.

Druhý model je počítanie času: pán šiel domov 2 hodiny (10 km dlhú dráhu išiel rýchlosťou 5 km/h). Pes celú tú dobu behal rýchlosťou 10 km/h. Takže za 2 hodiny nabehal 20 km.

Preto, ak sa nám nedarí vyriešiť úlohu jedným spôsobom, skúsme sa opäť vrátiť do etapy matematizácie a vytvoriť iný matematický model, ktorý sa lepšie hodí na riešenie konkrétnej úlohy.

Tvorba slovnej úlohy

Pri tvorbe slovnej úlohy vychádzame z konkrétnej matematickej úlohy, ktorou chceme dosiahnuť určitý vzdelávací cieľ. Napríklad, ak cieľom je precvičenie násobenia dvoch prirodzených čísel, matematická úloha by mohla mať zadanie: „Aké číslo je dvojnásobkom šestky?“

Z tejto matematickej úlohy vyrobíme slovnú úlohu tak, že k nej dotvoríme kontext – situáciu deťom známu a pokiaľ možno zaujímavú. Napr.:

„Osemročná Hanka sa hrala so svojou mladšou sestrou Jankou. Skákali cez švihadlo a rozhodli sa, že budú súťažiť, ktorá urobí viac preskokov bez chyby. Keďže Hanka je staršia a vždy by vyhrala, vymysleli spôsob vyrovnania šancí. Hanka vyhrá len vtedy, ak bude mať aspoň dvakrát toľko skokov ako Janka. Janka preskočila šesťkrát. Koľko najmenej musí Hanka skočiť, aby vyhrala?“

Po zadaní tejto jednej dlhšej úlohy môžeme ďalej dotvárať ďalšie otázky, ktorými precvičíme počítanie súčinov aj iných čísel.

Napr.: „Dievčatá zistili, že toto pravidlo je príliš slabé – Hanka stále vyhráva. Skúsia teda zmeniť pravidlo na trojnásobok. Janka skočila 5 skokov. Koľko musí najmenej skočiť Hanka?“

Pri riešení pracujeme s matematickým modelom, ale stále vnímame jeho prepojenie na konkrétnu situáciu. A to je práve najvýznamnejším prínosom používania slovných úloh – učia deti používať matematiku v bežných situáciách.

Čo si zapamätať?

- Slovná úloha je matematická úloha, ktorá je daná slovne a pritom vyžaduje pochopenie reálneho alebo realistického kontextu.
- Podmienkou správneho zvládnutia slovnej úlohy je dobré jazykové porozumenie, zvládnutie čítania s porozumením a schopnosť prepojiť úlohu so životnou skúsenosťou.
- Slovnú úlohu tvoria dve základné časti: popis situácie (zadanie) a otázka (výzva).
- Proces riešenia slovnej úlohy zahŕňa niekoľko fáz: rozbor zadania, matematizáciu (vytvorenie matematického modelu), riešenie matematickej úlohy a dematematizáciu (prevedenie výsledku do pôvodnej situácie).
- Počas riešenia slovnej úlohy vykonávame dve kontroly správnosti – kontrola správnosti matematického riešenia v matematickom modeli a kontrola správnosti v pôvodnom kontexte počas dematematizácie.
- Slovné úlohy môžeme deliť podľa typu operácie (sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie), podľa počtu operácií (jednoduché/zložené) alebo podľa kontextu (napr. úlohy o práci, pohybe, veku, nákupoch, …).
- Riešenie slovných úloh nie je vždy lineárne – je dôležité kontrolovať porozumenie, overovať výsledky a podľa potreby vytvárať nové modely.

Úlohy

1) Zadanie slovnej úlohy: „V lese žije 15 veveričiek. Každá veverička nazbierala rovnaký počet gaštanov. Spolu nazbierali 120 gaštanov. Koľko gaštanov nazbierala každá veverička?“ Uveďte základné informácie, ktoré treba z textu vyčítať, a vysvetlite, čo máte vypočítať.
2) Navrhnite matematický model na vyriešenie úlohy z úlohy 1. (Napríklad použite premennú a rovnicu.)
3) Vyriešte matematickú úlohu podľa modelu, ktorý ste si zvolili v úlohe 2.
4) Popíšte výsledok v pôvodnom kontexte – čo znamená vypočítaný počet gaštanov pre jednu veveričku.
5) Vytvorte krátku slovnú úlohu na tému nákupu s minimálne dvoma otázkami, ktoré budú precvičovať sčítanie a násobenie.
6) Prečítajte si zadanú slovnú úlohu a zistite, či obsahuje nejaké nadbytočné informácie alebo nejasnosti: „V autobusovom depe je 12 autobusov, z ktorých každý má natankovaných 180 litrov nafty. Cesta do cieľa trvá 2 hodiny. Vodič autobusovej linky číslo 17 má obľúbený sendvič so syrom a šunkou. Koľko litrov nafty sa nachádza celkovo vo všetkých autobusoch?“
7) Je zápis slovnej úlohy tak, ako sa štandardne vyučuje, nevyhnutnou súčasťou jej riešenia? Čím by mohol byť nahradený?
8) Vyriešte slovnú úlohu a popíšte každý krok riešenia vrátanie oboch kontrol správnosti: „Plocha obdĺžnikovej záhrady je 60 m^2. Jedna strana je o 4 metre dlhšia ako druhá. Aké sú rozmery záhrady?“

Riešenia

1) 15 veveričiek … 120 gaštanov,

   1 veverička …… ? gaštanov.

2) $15 \cdot x = 120$.

3) $x = 120 / 15 = 8$.

4) Číslo 8 je počet gaštanov, ktoré nazbierala každá jedna veverička.

5) Napríklad: „Mamička kúpila sedem koláčikov po 1,20 eura a chlieb za 2,50 eura. Koľko zaplatila za nákup? O koľko je koláčik lacnejší ako chlieb?“

6) Nadbytočná informácia je trvanie cesty, číslo linky a jedlo, ktoré si vodič doprial.

7) Nie, môže byť nahradený vyznačením dôležitých údajov priamo v zadaní podčiarknutím, zvýraznením, nákresom a podobne.

8) Rozbor zadania – poznáme obsah záhrady, jej tvar a vzťah medzi stranami.

   Matematizácia – záhradu abstrahujeme do geometrického objektu – obdĺžnika a zapíšeme vzťah medzi jeho stranami a obsahom:

   $$60 = x(x + 4)$$

   Riešenie matematickej úlohy urobíme algebricky ako riešenie kvadratickej rovnice:

   $$60 = x^2 + 4x$$

   $$x^2 + 4x - 60 = 0$$

   Táto rovnica má dve riešenia: $x = 6$ a $x = -10$. Mohli sme na to prísť uhádnutím (sú to delitele čísla 60) alebo použitím vzorca. Prvá kontrola správnosti spočíva v dosadení týchto riešení do rovnice – obe sú správne.

   Dematematizácia a druhá kontrola správnosti – čísla, ktoré nám vyšli, sú jedným z rozmerov záhrady, takže záporné riešenie zamietame. Zisťujeme, že sme vypočítali iba jeden rozmer $x = 6$ metrov. Druhý musíme ešte vypočítať.

   Zo zadania zistíme, že druhá strana je o 4 metre dlhšia, takže 6 + 4 = 10 metrov. Posledná kontrola správnosti – obsah záhrady s rozmermi 6 a 10 metrov je naozaj 60 m^2. (Použili sme znovu geometrický model.)

Záver

Prechádzka po svete čísel nás zaviedla od dávnych civilizácií až k moderným pojmom, ktoré formujú matematické myslenie dnešného žiaka. Spoznali sme rôzne číselné sústavy, rozličné modely čísel a ich historické i didaktické pozadie. Pochopili sme, že čísla nie sú len symbolmi na papieri, ale nástrojmi, ktoré nám pomáhajú orientovať sa vo svete, vyjadrovať kvantity, poradia, zmeny i vzťahy.

Učiteľ matematiky by mal poznať nielen matematický obsah, ale aj vývinové fázy, ktorými dieťa pri chápaní čísel prechádza. Výber vhodných modelov a stratégií zohráva kľúčovú úlohu v tom, ako hlboko a trvalo si žiaci jednotlivé poznatky osvoja. Vyučovanie matematiky by malo byť viac než len odovzdávaním faktov – malo by podnecovať zvedavosť, podporovať objavovanie a vytvárať pevné poznatkové štruktúry.

Veríme, že táto učebnica je nielen sprievodcom po svete čísel, ale aj podnetom k zamysleniu nad tým, ako matematiku učiť zmysluplne, premyslene a s ohľadom na detského žiaka. Dúfame, že si z nej každý budúci učiteľ odnesie nielen vedomosti, ale aj inšpiráciu a radosť z učenia.

Doplňujúce študijné materiály

Prechádzka po svete čísel – NotebookLM

Na nasledujúcej adrese nájdete podcasty, kvízy a kartičky ku každej kapitole tejto učebnice:

https://notebooklm.google.com/notebook/c6dfbee8-683e-4234-b39a-b2b68992bc09

Literatúra

BEČVÁŘ, J. – BEČVÁŘOVÁ, M. – VYMAZALOVÁ, H.: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie.* Prometheus : Praha, 2003. 174 s. ISBN 80-7196-255-4. Dostupné na: http://dml.cz/dmlcz/401853. Naposledy pristúpené: 1. 10. 2025.

ČERNEK, P. – BEDNÁŘOVÁ, S.: *Matematika pre 2. ročník základných škôl, Pracovný zošit, 2. časť.* AITEC, s. r. o., 2018. 88 s. ISBN 978-80-8146-073-9.

ČIŽMÁR, J.: *Dejiny matematiky od najstarších čias po súčasnosť.* Perfekt, a. s. : Bratislava, 2017. 885 s. ISBN 978-80-8046-829-3.

ČIŽMÁR, J.: *Euklides : Základy.* Perfekt, a. s. : Bratislava, 2022. 728 s. ISBN 978--80-8226-031-4.

FIALOVÁ, J.: *Prechádzka po svete geometrie.* Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity v Trnave : Trnava, 2020. 121 s. ISBN 978-80-568-0327-1.

HEJNÝ, M. – NOVOTNÁ, J. – STEHLÍKOVÁ, N.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Pedagogická fakulta Univerzity Karlovej v Praze : Praha, 2004. 244 s. ISBN 80-7290-189-3.

HEJNÝ, M. – KUŘINA, F.: *Dítě, škola a matematika.* Portál : Praha, 2015. 240 s. ISBN 978-80-262-0901-0.

HÍC, P. – POKORNÝ, M.: *Logika, množiny, binárne relácie.* Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity v Trnave : Trnava, 2010, 196 s. ISBN 978-80-8082-389-4.

HILBERT, D. (Eds. EWALD, W. – SIEG, W.): *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic, 1917–1933.* Springer-Verlag : Heidelberg, 2013. 1062 s. ISBN 978-3-540-20578-4.

JAKSON, T.: *Matematika, 100 objavov, ktoré zmenili históriu.* Slovart, s. r. o. : Bratislava, 2013. 144 s. ISBN 978-80-556-0834-1.

MAREŠ, M.: *Příběhy matematiky.* Pistorius & Olšanská, s. r. o. : Příbram, 2008. 334 s. ISBN 978-8087053-16-4.

MOKRIŠ, M. – SCHOLTZOVÁ, I.: *Vybrané kapitoly z matematiky.* Prešovská univerzita v Prešove : Prešov, 2021. 136 s. ISBN 978-80-555-2855-1. Dostupné na: https://elibrary.pulib.sk/elpub/document/isbn/9788055528557. Naposledy pristúpené: 1. 10. 2025.

VILENKIN, N. J.: *Rozhovory o množinách.* SPN : Bratislava, 1972. 220 s.